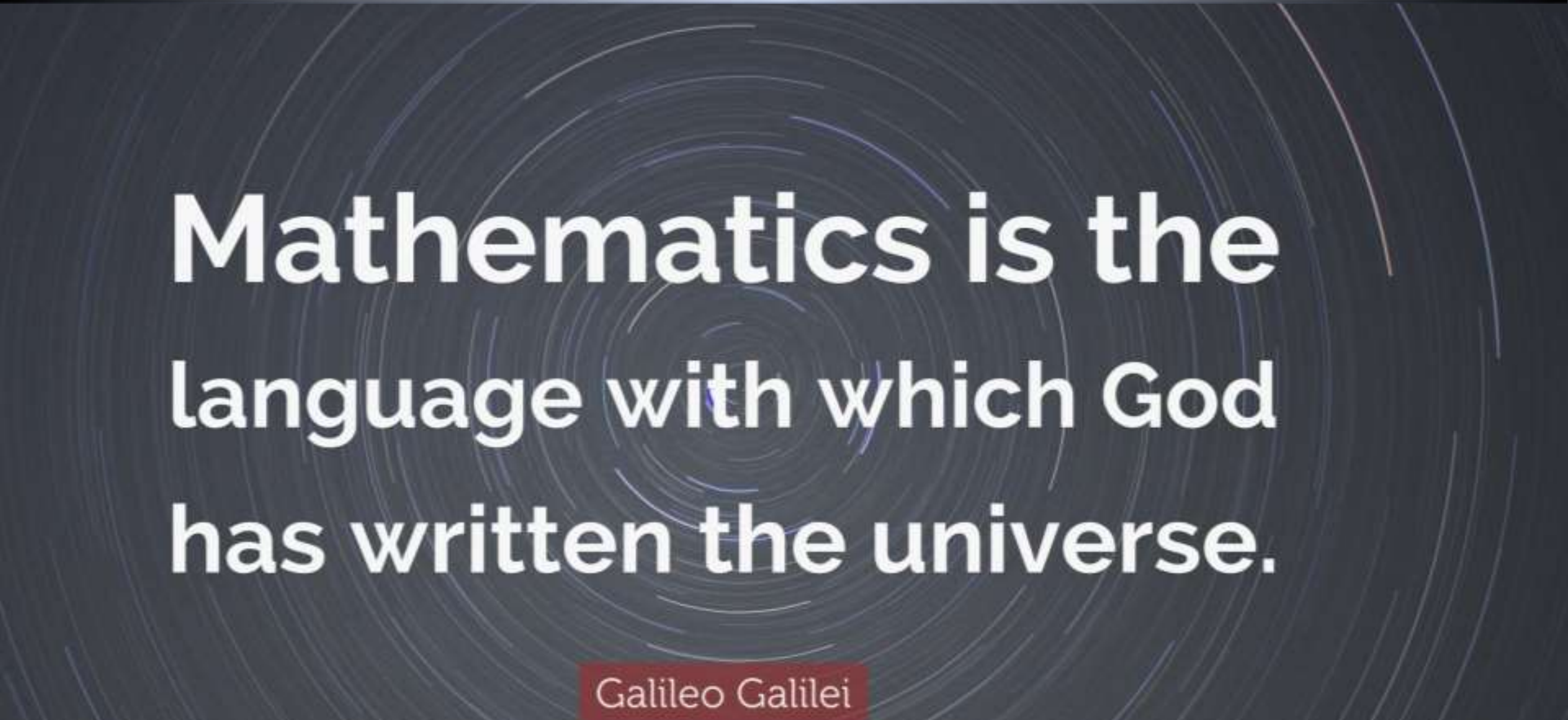
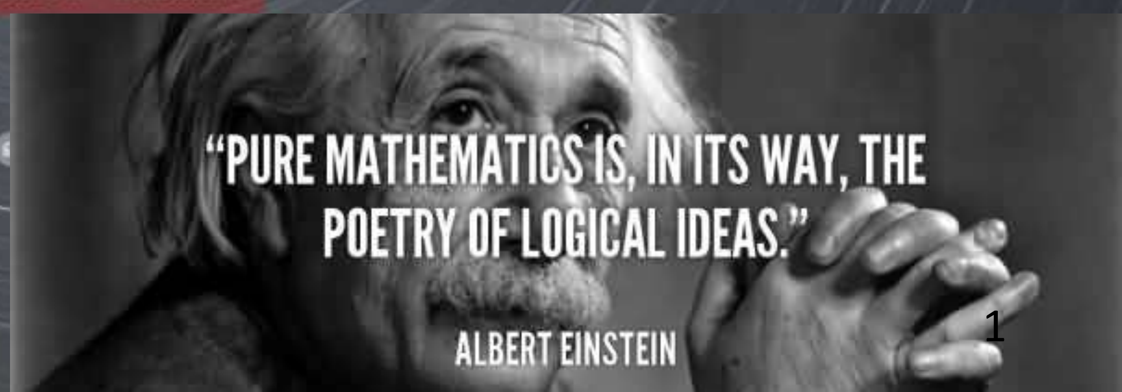
第零章 数学补充


Mathematics is the
language with which God
has written the universe.
Galileo Galilei


"PURE MATHEMATICS IS, IN ITS WAY, THE
POETRY OF LOGICAL IDEAS."
ALBERT EINSTEIN

§0−1 矢量代数

§0−2 场及其导数

§0−3 矢量场的积分

§0−4 平面角与立体角

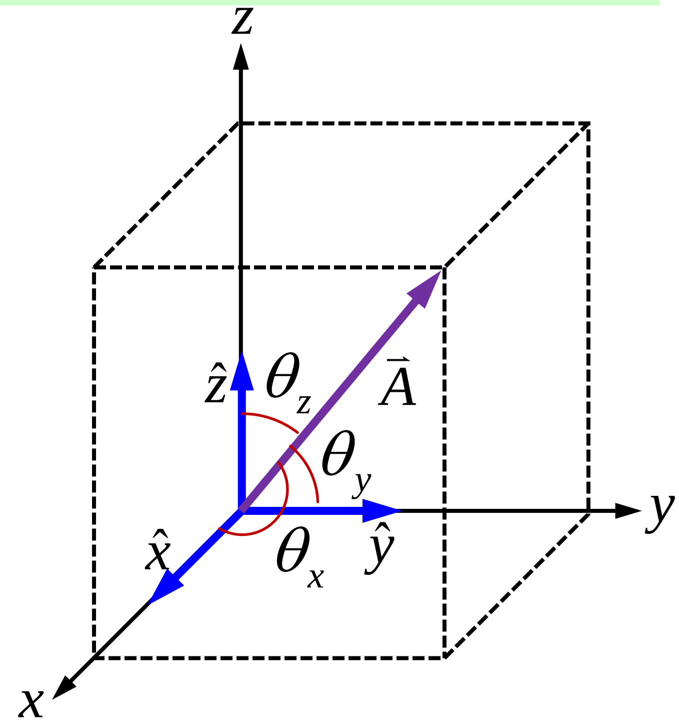
§0.1 矢量代数

一、矢量

$$\vec{A} = A_x\hat{x} + A_y\hat{y} + A_z\hat{z} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} A_x, & A_y, & A_z \end{pmatrix} \quad \text{or} \quad \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$$

大小： $$A = \left|\vec{A}\right| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

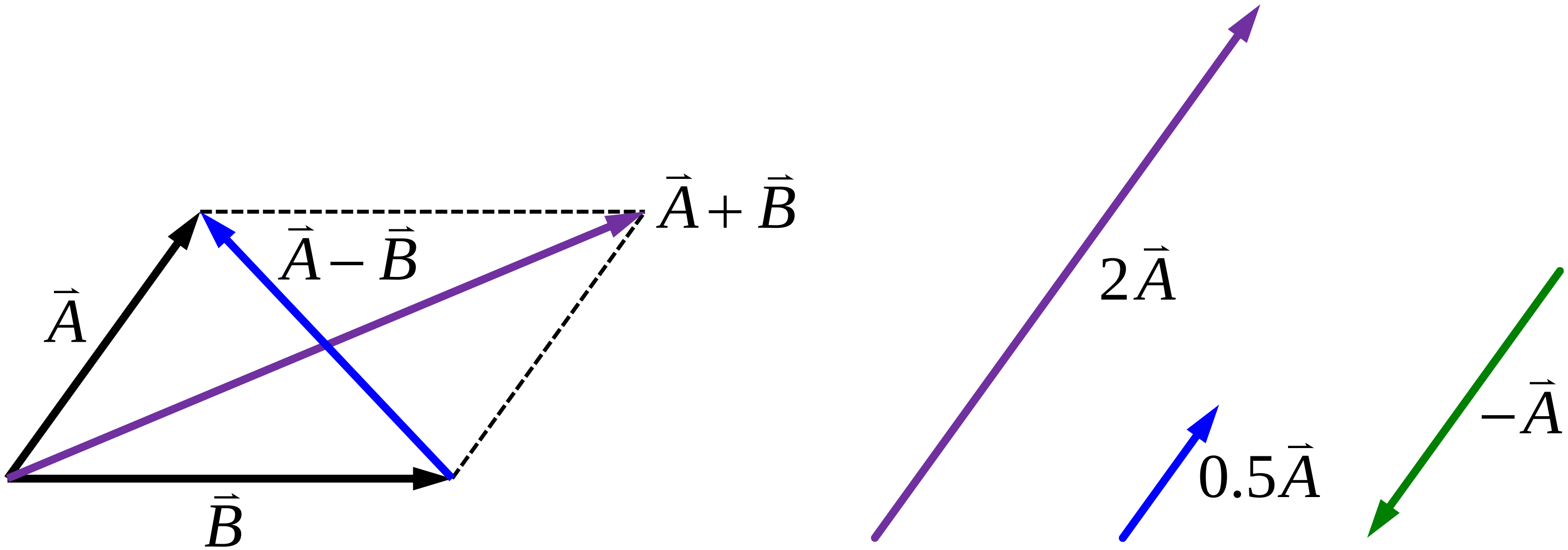
方向： $$\begin{cases} \cos\theta_x = A_x / A \\ \cos\theta_y = A_y / A \\ \cos\theta_z = A_z / A \end{cases}$$



二、矢量的线性运算

加法： $\vec{A} + \vec{B} \triangleq (A_x + B_x)\hat{x} + \left(A_y + B_y\right)\hat{y} + (A_z + B_z)\hat{z}$

数乘： $\lambda\vec{A} \triangleq (\lambda A_x)\hat{x} + \left(\lambda A_y\right)\hat{y} + (\lambda A_z)\hat{z}$



三、矢量的点乘（标量积）

$$\vec{A}\cdot\vec{B} \triangleq A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

法则：

(1) $\vec{B}\cdot\vec{A}=\vec{A}\cdot\vec{B}$

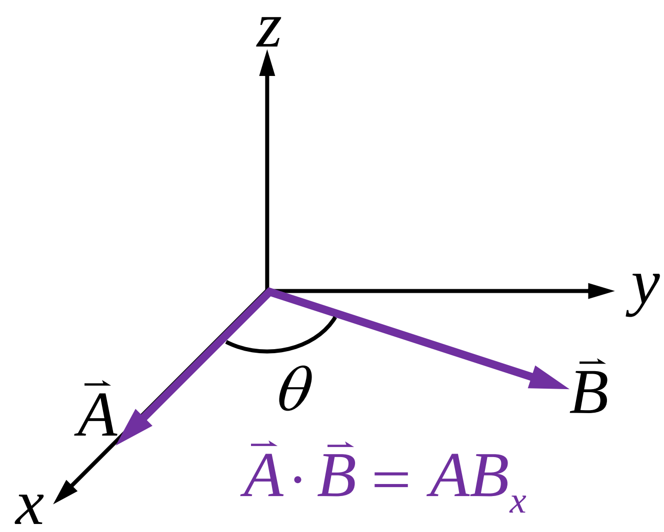
(2) $\left(\lambda\vec{A}+\mu\vec{B}\right)\cdot\vec{C}=\lambda\vec{A}\cdot\vec{C}+\mu\vec{B}\cdot\vec{C}$

性质：

(1) $A=\left|\vec{A}\right| \triangleq \sqrt{\vec{A}\cdot\vec{A}}$

(2) $\begin{cases}\hat{x}\cdot\hat{x}=\hat{y}\cdot\hat{y}=\hat{z}\cdot\hat{z}=1\\ \hat{x}\cdot\hat{y}=\hat{y}\cdot\hat{z}=\hat{z}\cdot\hat{x}=0\end{cases}$

(3) $\vec{A}\cdot\vec{B}=AB\cos\theta$



矢量及其分量： $\vec{A}=\left(\vec{A}\cdot\hat{x}\right)\hat{x}+\left(\vec{A}\cdot\hat{y}\right)\hat{y}+\left(\vec{A}\cdot\hat{z}\right)\hat{z}$

四、矢量的叉乘（矢量积）

$$\vec{A}\times\vec{B} \triangleq \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \begin{aligned} &(A_yB_z - A_zB_y)\hat{x} \\ &+(A_zB_x - A_xB_z)\hat{y} \\ &+(A_xB_y - A_yB_x)\hat{z} \end{aligned}$$

法则：

（1） $\vec{B}\times\vec{A} = -\vec{A}\times\vec{B}$

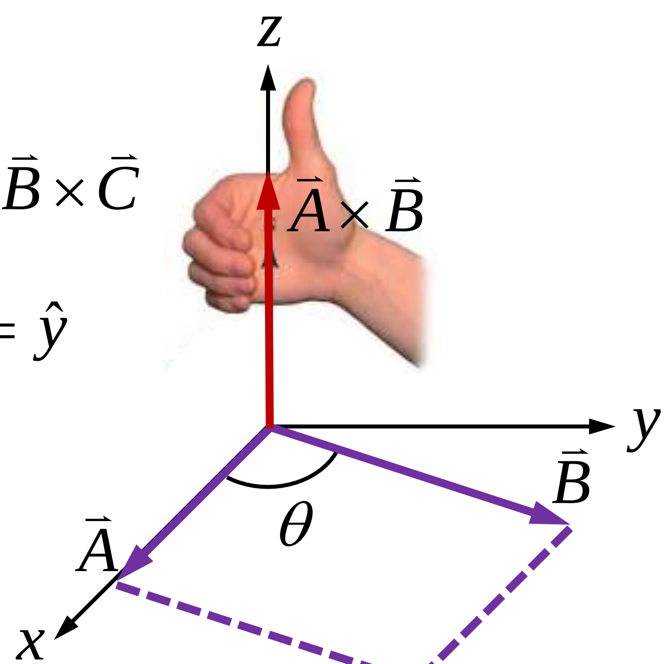
（2） $(\lambda\vec{A}+\mu\vec{B})\times\vec{C} = \lambda\vec{A}\times\vec{C} + \mu\vec{B}\times\vec{C}$

性质：

（1） $\begin{cases} \hat{x}\times\hat{y} = \hat{z},\ \hat{y}\times\hat{z} = \hat{x},\ \hat{z}\times\hat{x} = \hat{y} \\ \hat{x}\times\hat{x} = \hat{y}\times\hat{y} = \hat{z}\times\hat{z} = 0 \end{cases}$

（2） $\vec{A}\times\vec{B} = (AB\sin\theta)\hat{n}$

（**A**、**B**、**n**）满足右手法则



$\vec{A}\cdot\vec{B} = AB_y\hat{z}$

三个重要关系

(1) $\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)\times\vec{C}=\left(\vec{A}\cdot\vec{C}\right)\vec{B}-\left(\vec{B}\cdot\vec{C}\right)\vec{A}$

【证明】 只需证明左右两边的对应分量相等。以 x 分量为例。

$$\left[\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)\times\vec{C}\right]_x=\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)_y C_z-\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)_z C_y$$

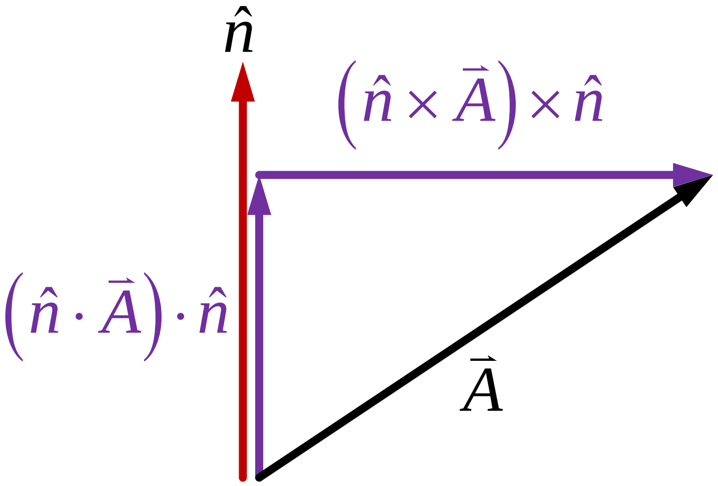
$$=\left(A_zB_x-A_xB_z\right)C_z-\left(A_xB_y-A_yB_x\right)C_y$$

$$=\left(A_yC_y+A_zC_z\right)B_x-\left(B_yC_y+B_zC_z\right)A_x+A_xB_xC_x-A_xB_xC_x$$

$$=\left(A_xC_x+A_yC_y+A_zC_z\right)B_x-\left(B_xC_x+B_yC_y+B_zC_z\right)A_x$$

$$=\left[\left(\vec{A}\cdot\vec{C}\right)\vec{B}-\left(\vec{B}\cdot\vec{C}\right)\vec{A}\right]_x$$

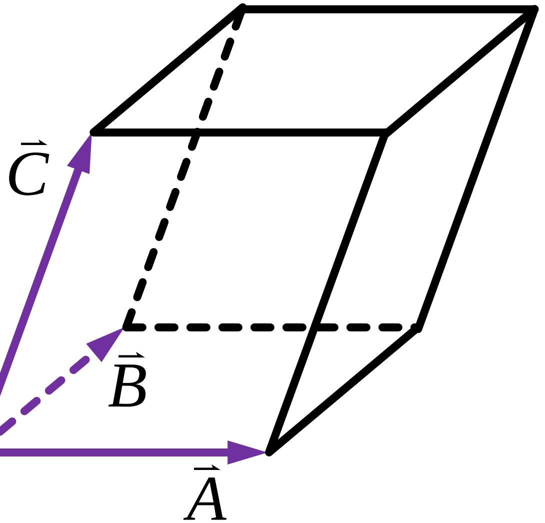
(2) $\vec{A}=(\hat{n}\cdot\vec{A})\cdot\hat{n}+(\hat{n}\times\vec{A})\times\hat{n}$



(3) $(\vec{A}\times\vec{B})\cdot\vec{C}=\begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}=\pm$体积

$\Rightarrow (\vec{A}\times\vec{B})\cdot\vec{C}=(\vec{B}\times\vec{C})\cdot\vec{A}=(\vec{C}\times\vec{A})\cdot\vec{B}$

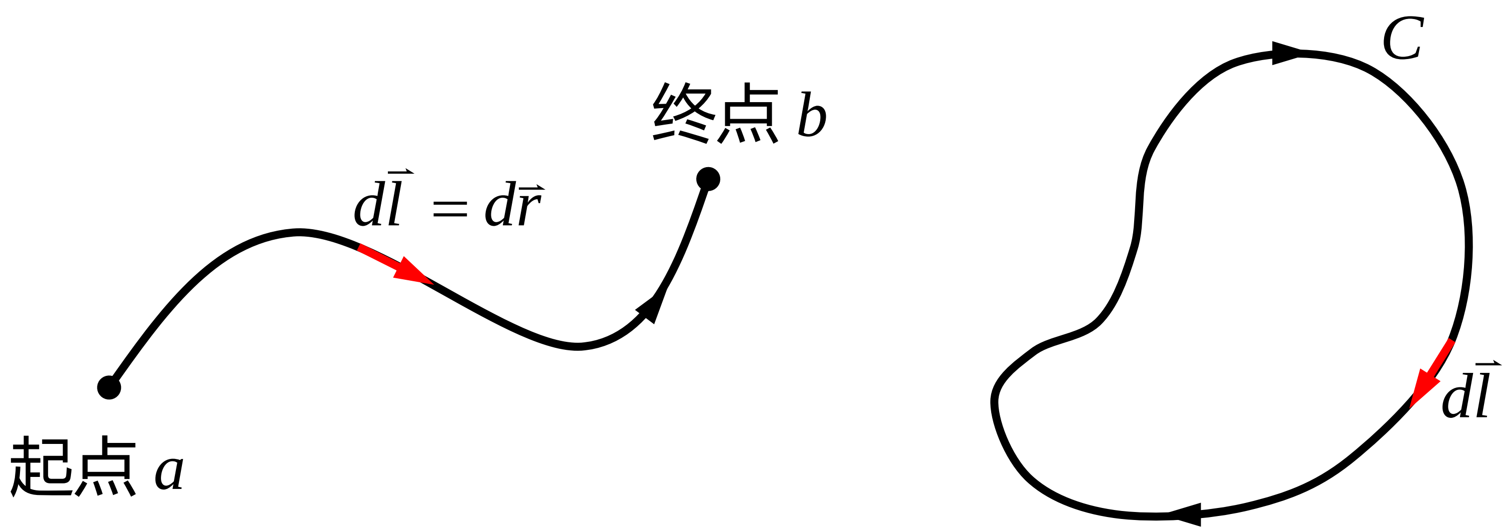
$\Rightarrow (\vec{A}\times\vec{B})\cdot\vec{C}=\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})$



五、两个常用矢量

线元： 曲线上无限靠近的两点之间的相对位矢

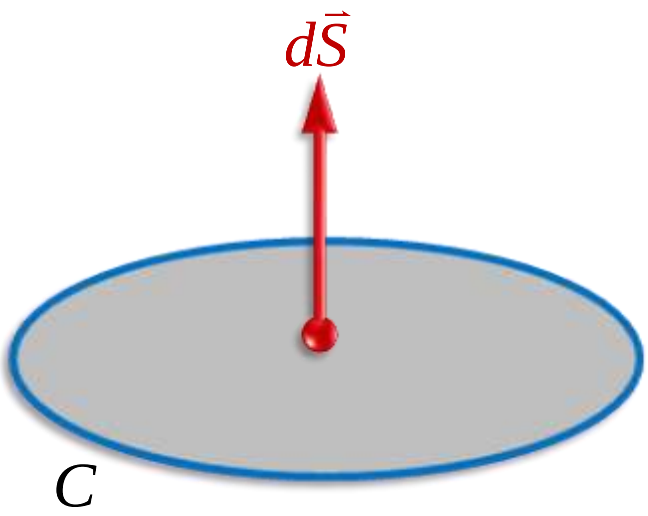
- 线元沿着曲线的切线方向
- 约定起点和终点后，开曲线上各线元的方向唯一确定
- 约定绕行方向后，闭曲线上各线元的方向唯一确定

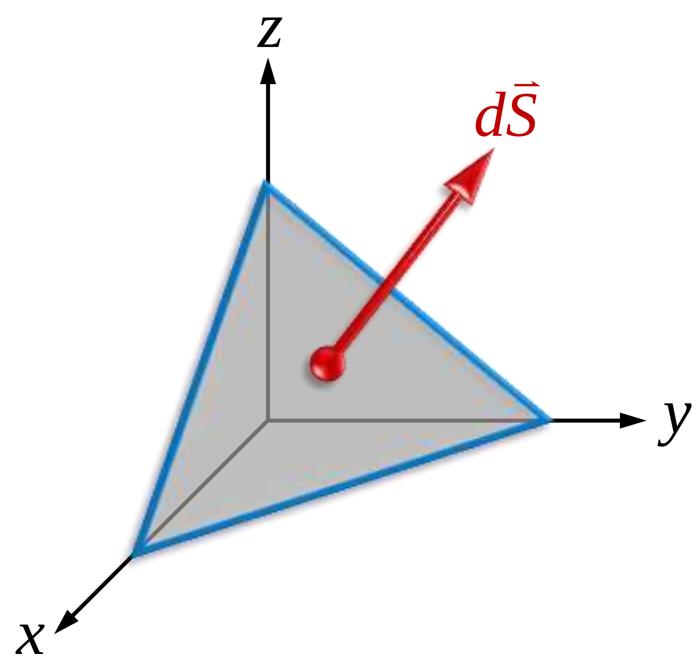


$\vec{r}$: 位置矢量（位矢）

面元： 曲面的面元沿着法向方向

$$d\vec{S}=\hat{n}dS=\left(n_x dS\right)\hat{x}+\left(n_y dS\right)\hat{y}+\left(n_z dS\right)\hat{z}$$



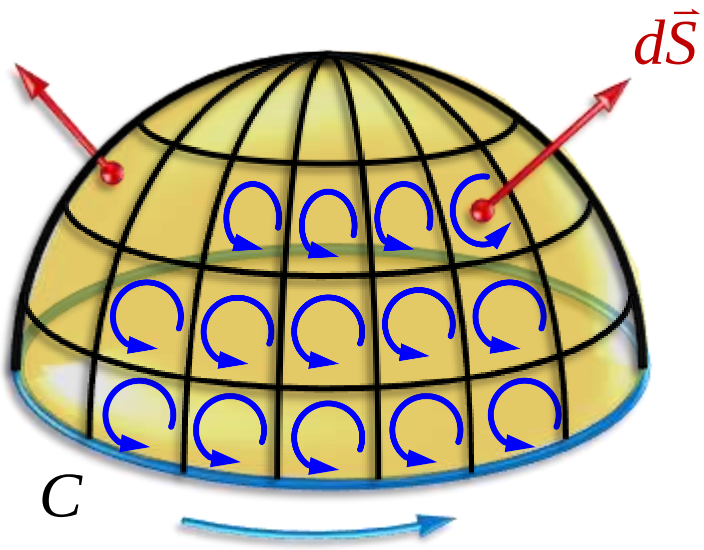


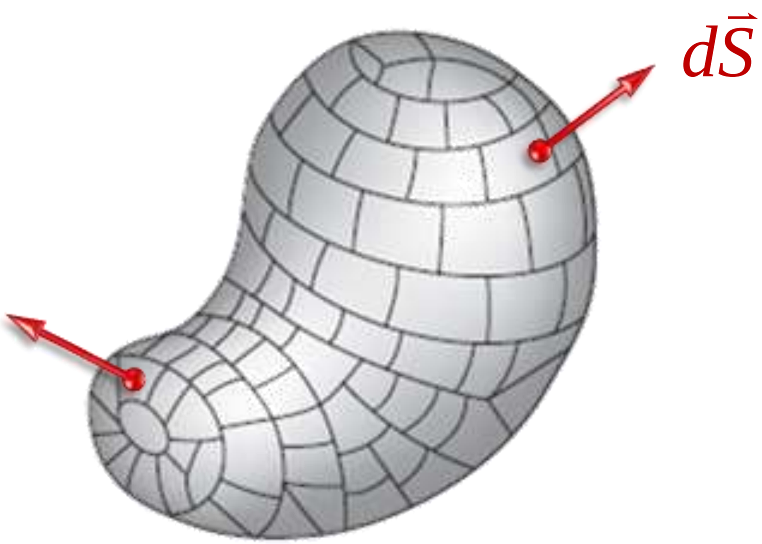
- 开曲面的法向可任意约定（要求连续变化）
- 闭曲线 C 是开曲面 S 的边界（$C=\partial S$）

规定：开曲面法向与其边界的绕行方向满足右手法则

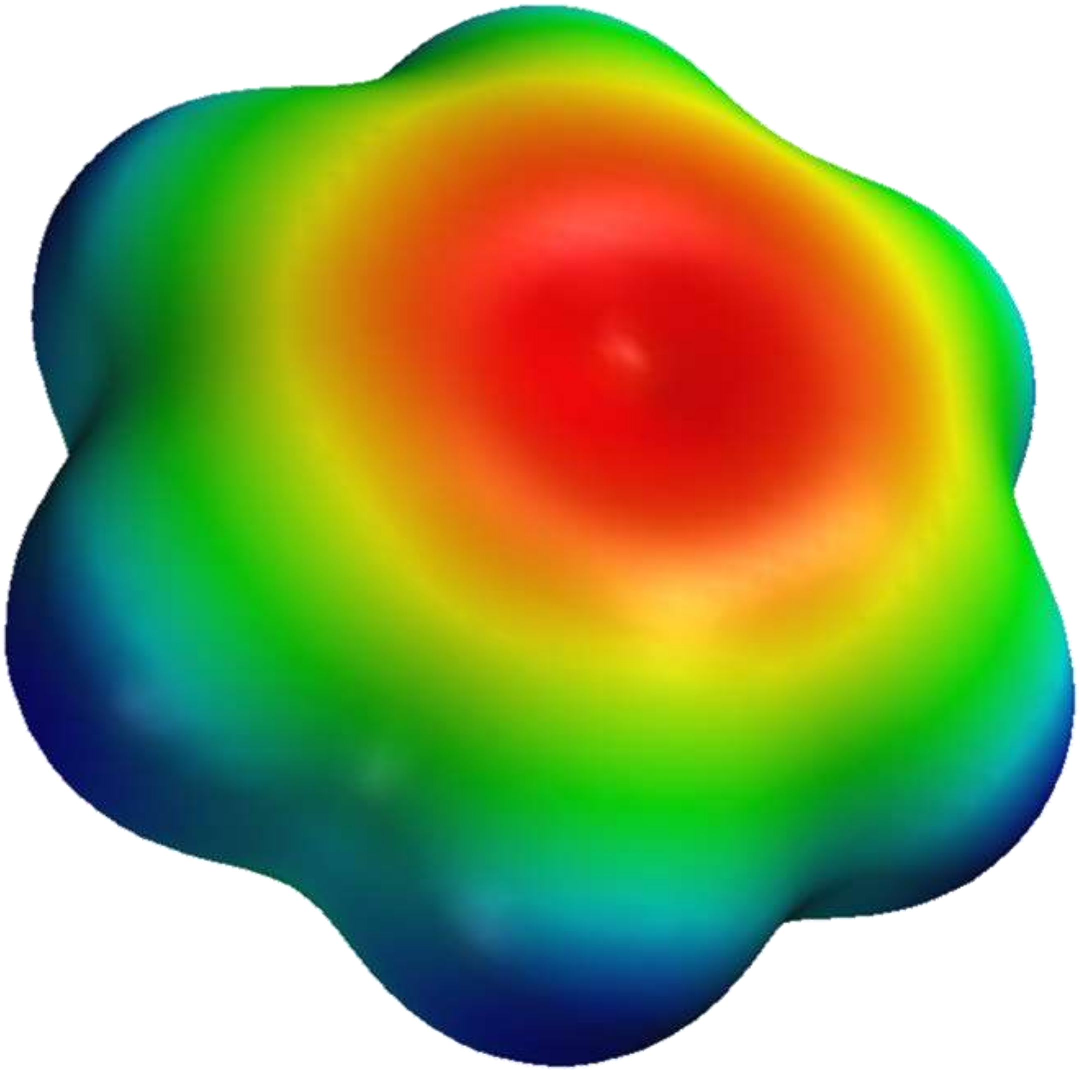
- 闭曲面 S 是三维区域 V 的边界（$S=\partial V$）

规定：闭曲面总是以外法向作为面元正向





§0.2 场及其导数



一、标量场与矢量场

标量场（标量函数）：空间每一点都指定了唯一的一个标量

$$\varphi = \varphi(\vec{r}) = \varphi(x, y, z)$$

二维空间的标量函数称为二维标量场，如

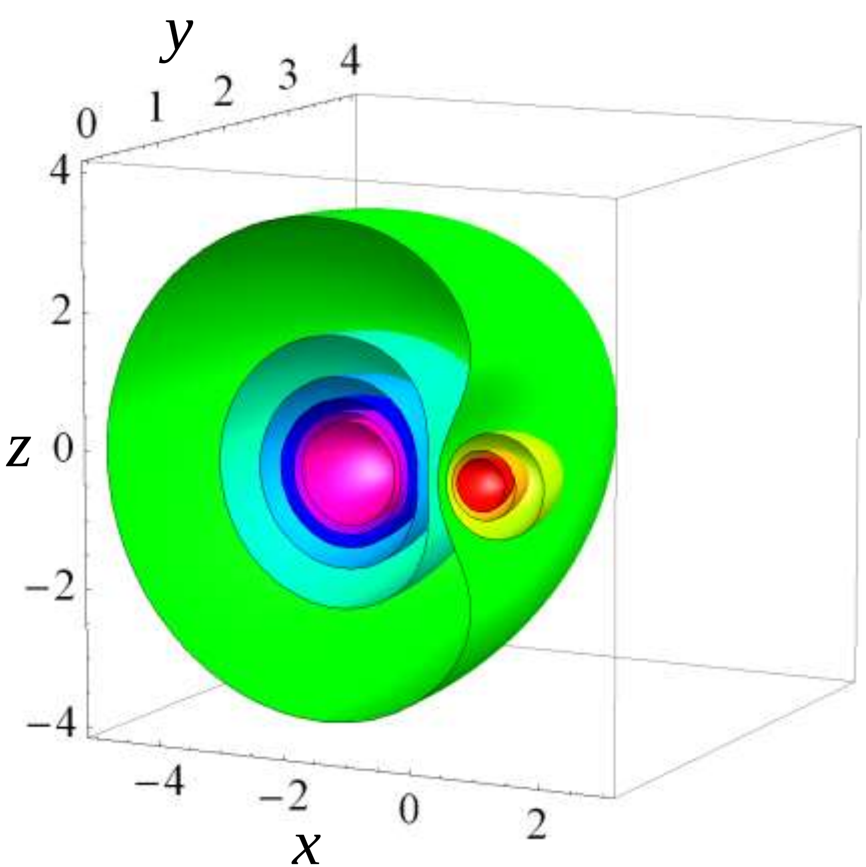
$$\varphi = \varphi(x, y), \quad \varphi = \varphi(\theta, \phi)$$

矢量场（矢量函数）：空间每一点都指定了唯一的一个矢量

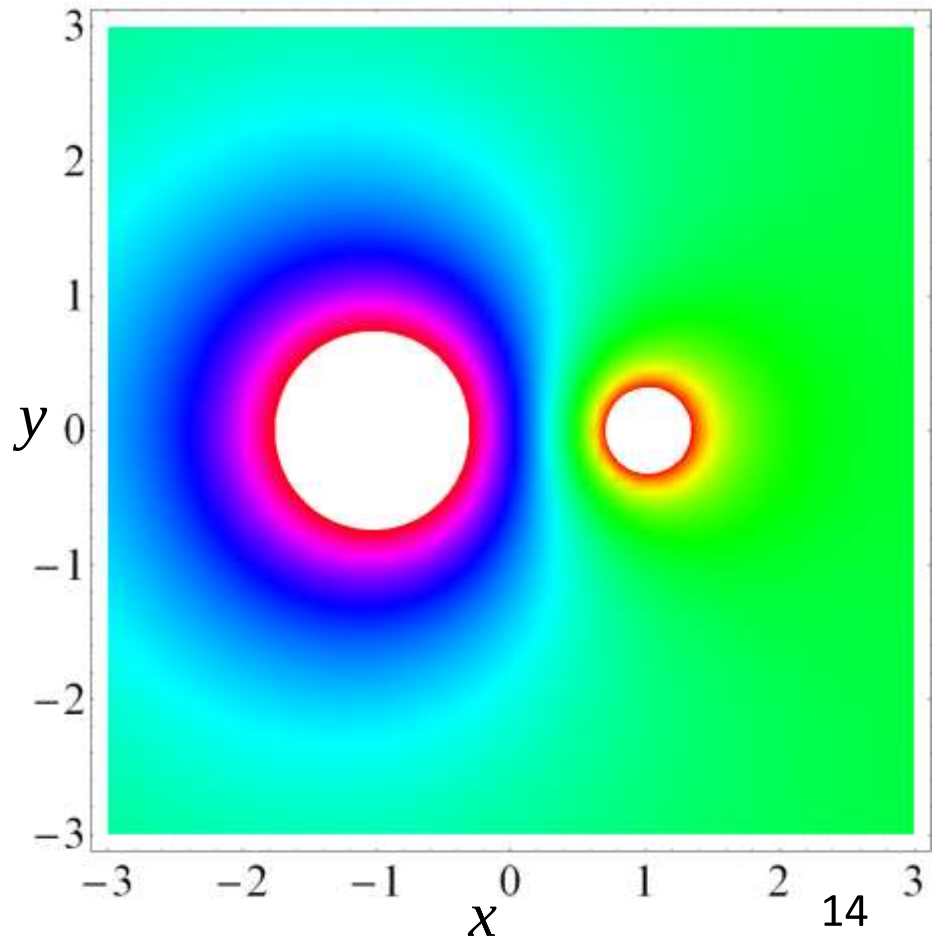
$$\begin{aligned}\vec{F} &= \vec{F}(\vec{r}) = \vec{F}(x, y, z) \\ &= F_x(x, y, z)\hat{x} + F_y(x, y, z)\hat{y} + F_z(x, y, z)\hat{z}\end{aligned}$$

【例】 $$\varphi = \frac{3}{\sqrt{(x+1)^2 + y^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-1)^2 + y^2 + z^2}}$$

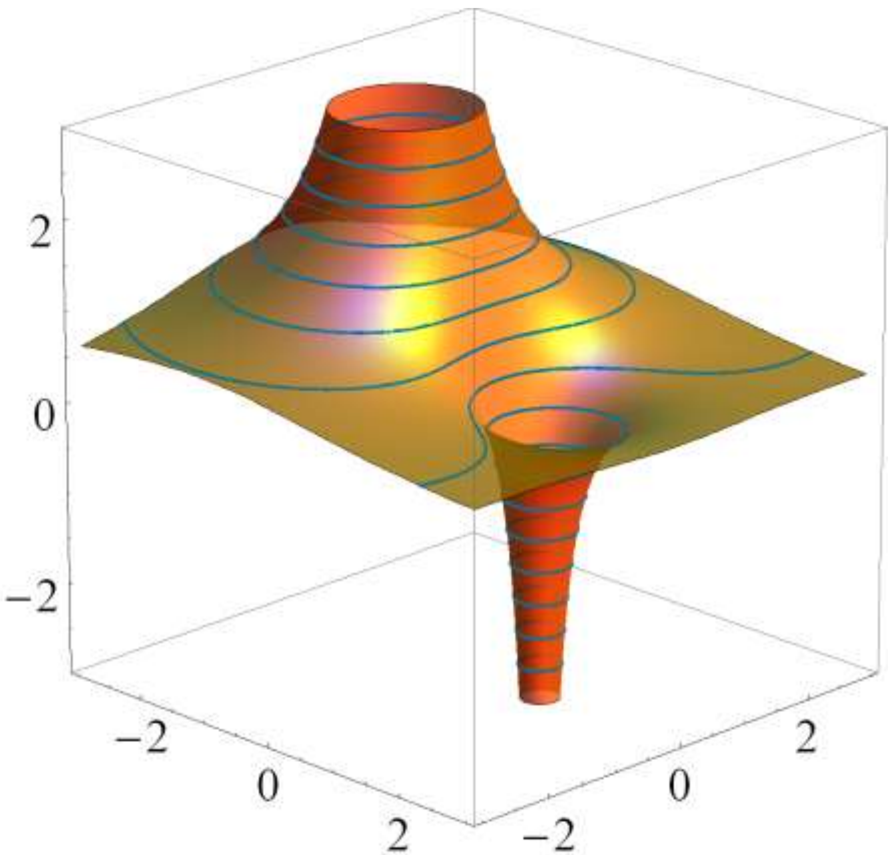
$\varphi(x, y, z) = const.$



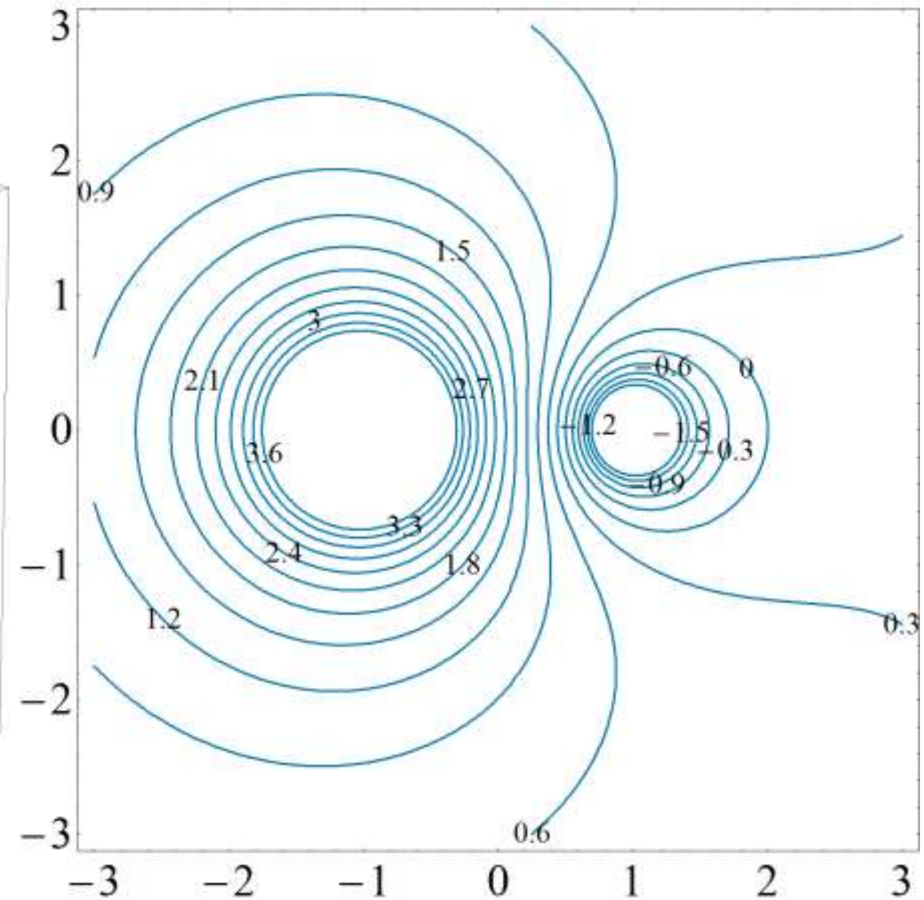
$\varphi(x, y, z = 0)$



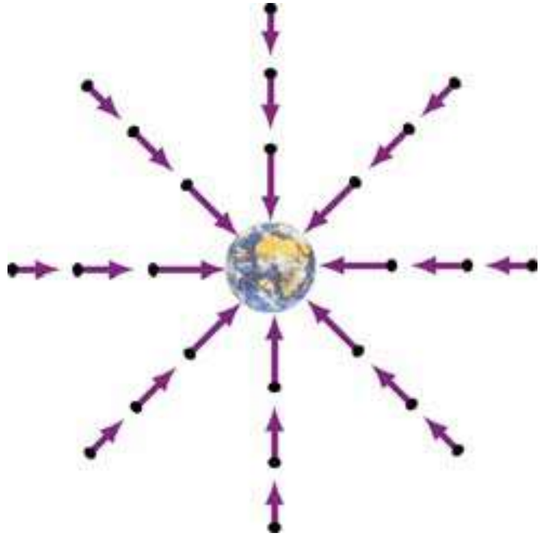
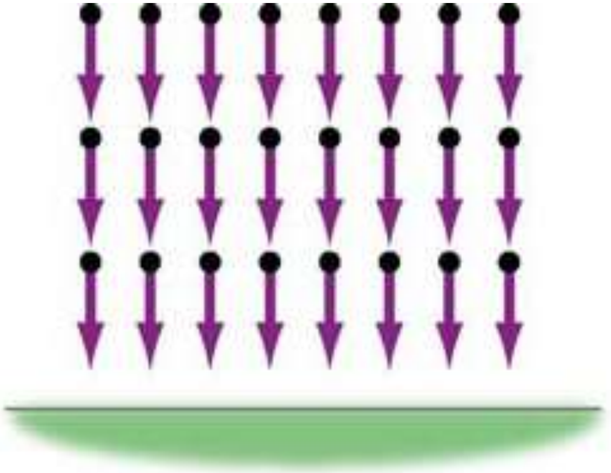
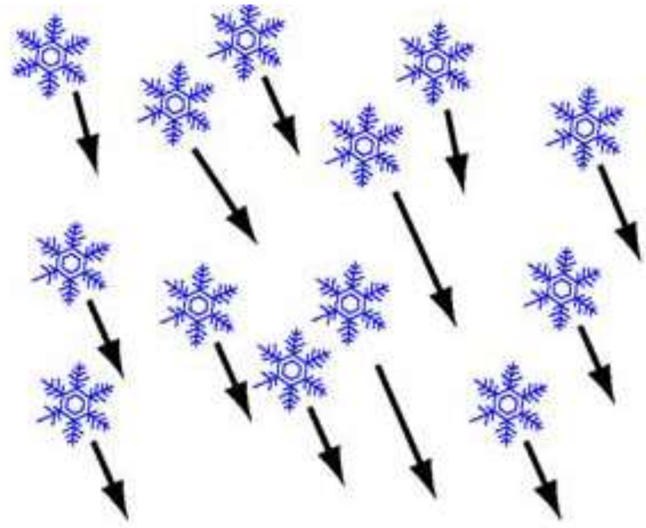
$\varphi\left(x, y, z=0\right)$



$\varphi\left(x, y, z=0\right)=const.$



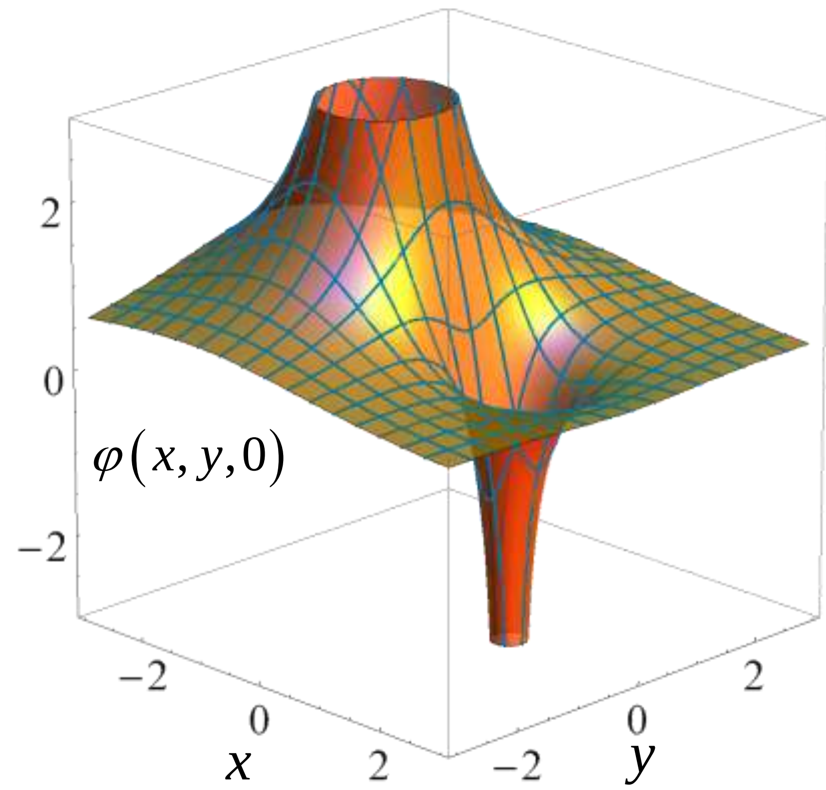
【例】矢量场


对于确定的 y、z，定义单变量函数

$$f(x) = \varphi(x, y, z)$$

则 df/dx 给出了函数 φ 在 $\boldsymbol{r}$ 点处沿着 x 轴方向的变化率



$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

将其称为 φ 对 x 的**偏导数**，记为

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} \triangleq \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\varphi(x+\Delta x, y, z) - \varphi(x, y, z)}{\Delta x} = \partial_x \varphi$$

类似地，有

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} \triangleq \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{\varphi(x+\Delta x,y,z)-\varphi(x,y,z)}{\Delta x} = \partial_x\varphi \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} \triangleq \lim\limits_{\Delta y\to 0} \dfrac{\varphi(x,y+\Delta y,z)-\varphi(x,y,z)}{\Delta y} = \partial_y\varphi \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial z} \triangleq \lim\limits_{\Delta z\to 0} \dfrac{\varphi(x,y,z+\Delta z)-\varphi(x,y,z)}{\Delta z} = \partial_z\varphi \end{cases}$$

法则：

$$\frac{\partial}{\partial x}(\varphi\psi) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\psi + \varphi\frac{\partial \psi}{\partial x}, \qquad \frac{\partial}{\partial x}\varphi(\psi) = \frac{\partial f}{\partial \psi}\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

【例】 $\varphi(x, y, z) = x^2 y^5 z^7$

【解】 $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = 2xy^5 z^7, \qquad \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = 5x^2 y^4 z^7, \qquad \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = 7x^2 y^5 z^6$

【例】 $\varphi = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

【解】

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \dfrac{x}{r} \\[2ex] \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \dfrac{y}{r} \\[2ex] \dfrac{\partial \varphi}{\partial z} = \dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \dfrac{z}{r} \end{cases}$$

二、标量场的梯度

标量场 $\varphi(x, y, z)$ 在 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{r} + d\boldsymbol{r}$ 两点处的差值

$$d\varphi(x,y,z)=\varphi(x+dx,y+dy,z+dz)-\varphi(x,y,z)$$

$$=\left[\varphi(x+dx,y+dy,z+dz)-\varphi(x,y+dy,z+dz)\right]$$

$$+\left[\varphi(x,y+dy,z+dz)-\varphi(x,y,z+dz)\right]$$

$$+\left[\varphi(x,y,z+dz)-\varphi(x,y,z)\right]$$

$$\Longrightarrow\quad d\varphi(\vec{r}) \triangleq \varphi(\vec{r}+d\vec{r})-\varphi(\vec{r})=\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx+\frac{\partial\varphi}{\partial y}dy+\frac{\partial\varphi}{\partial z}dz$$

$$\Longrightarrow\quad d\varphi(\vec{r})=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x},\frac{\partial\varphi}{\partial y},\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)\cdot(dx,dy,dz)$$

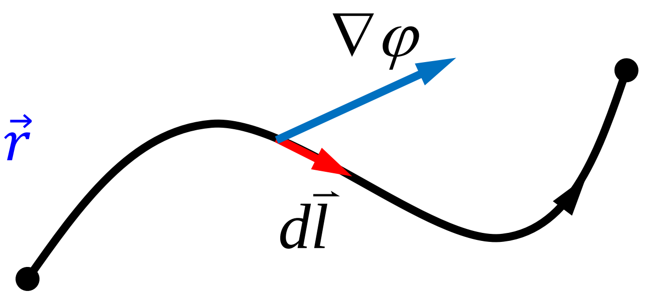
在直角坐标系下，标量场 $\varphi(x, y, z)$ 的**梯度**定义为

$$\nabla\varphi \triangleq \frac{\partial\varphi}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\hat{z} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)$$

- 在每个点处确定了唯一的一个矢量，
  标量场的梯度是一个矢量场。

- 梯度的与坐标系无关的定义：

$$d\varphi(\vec{r}) \triangleq \varphi(\vec{r} + d\vec{r}) - \varphi(\vec{r}) = \nabla\varphi \cdot d\vec{r}$$

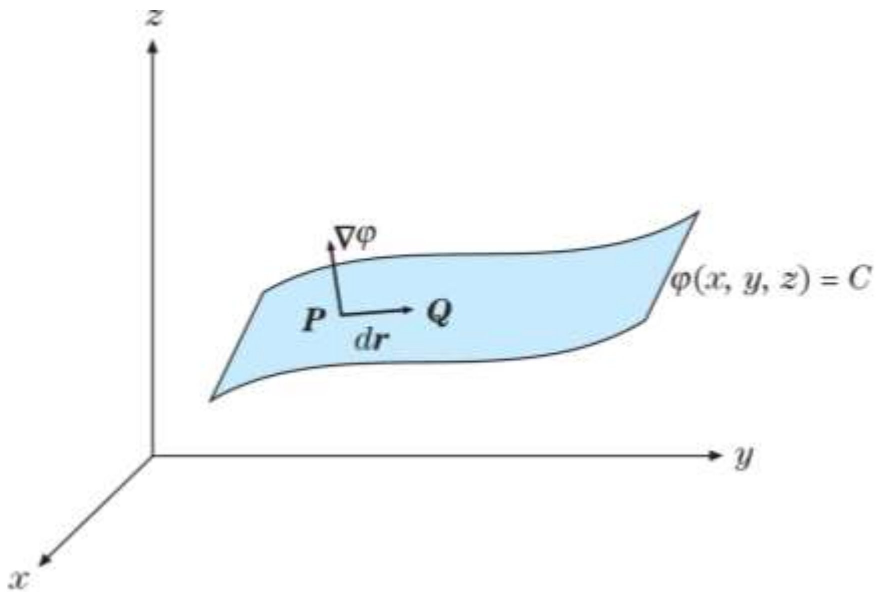


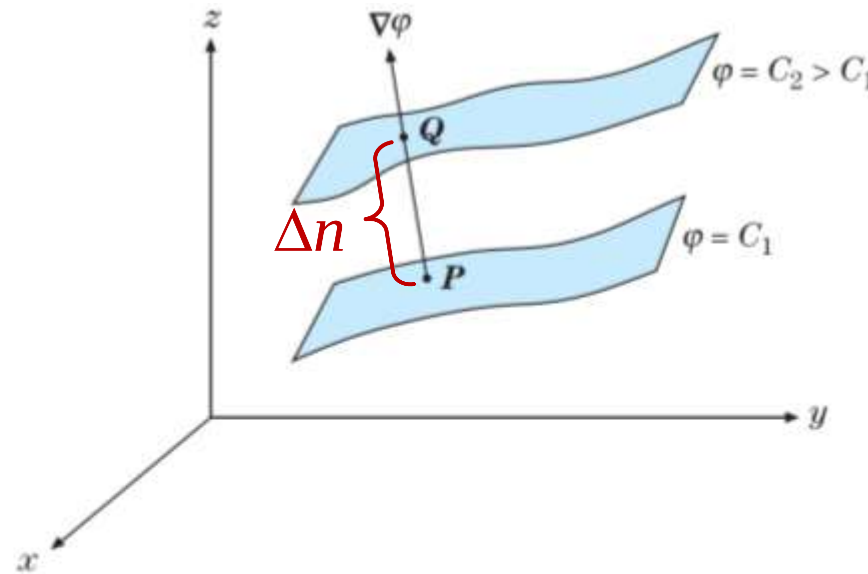
- **梯度积分的基本定理**

$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \nabla\varphi \cdot d\vec{l} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} d\varphi(\vec{r}) = \varphi(\vec{r}_2) - \varphi(\vec{r}_1) \quad \Longrightarrow \quad \oint_C \nabla\varphi \cdot d\vec{l} = 0$$

（与路径无关）

如果 P 点处 $\nabla\varphi=0$，则 P 为驻值点：$d\varphi(P)=0$





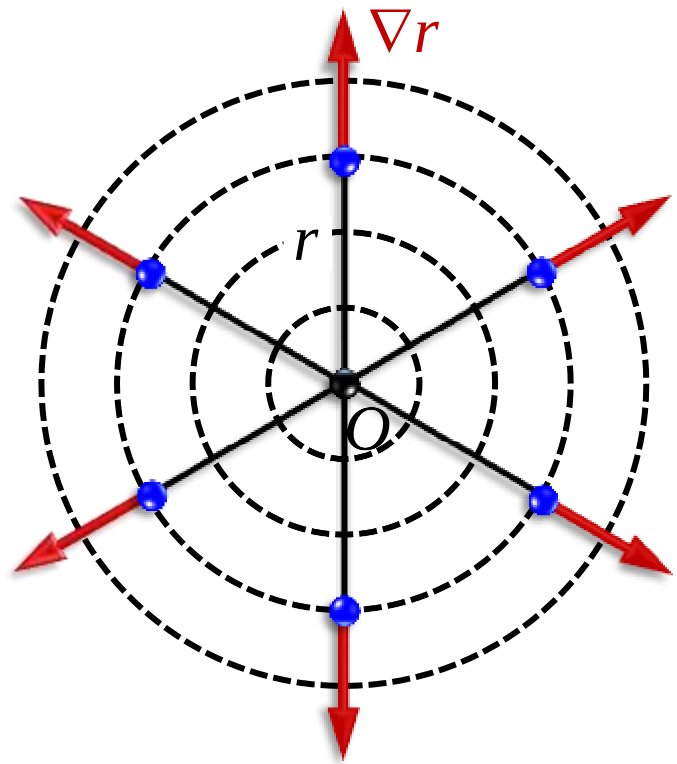
$\nabla\varphi$ 垂直于 φ 的等值面/线指向 φ 增加最快方向（设为 $\mathbf{n}$），大小则是沿着方向的变化率

$$\nabla\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial n}\hat{n}$$

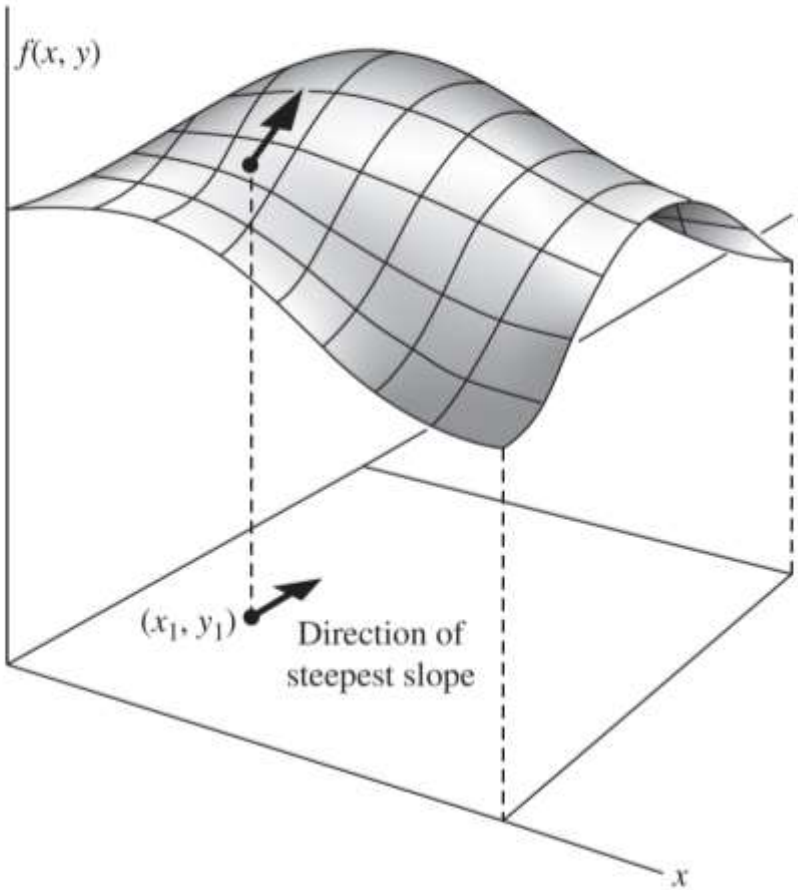
【例】径向距离 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 的梯度。

【解】 $$\nabla r=\frac{\partial r}{\partial x}\hat{x}+\frac{\partial r}{\partial y}\hat{y}+\frac{\partial r}{\partial z}\hat{z}=\frac{x\hat{x}+y\hat{y}+z\hat{z}}{r}=\frac{\vec{r}}{r}$$

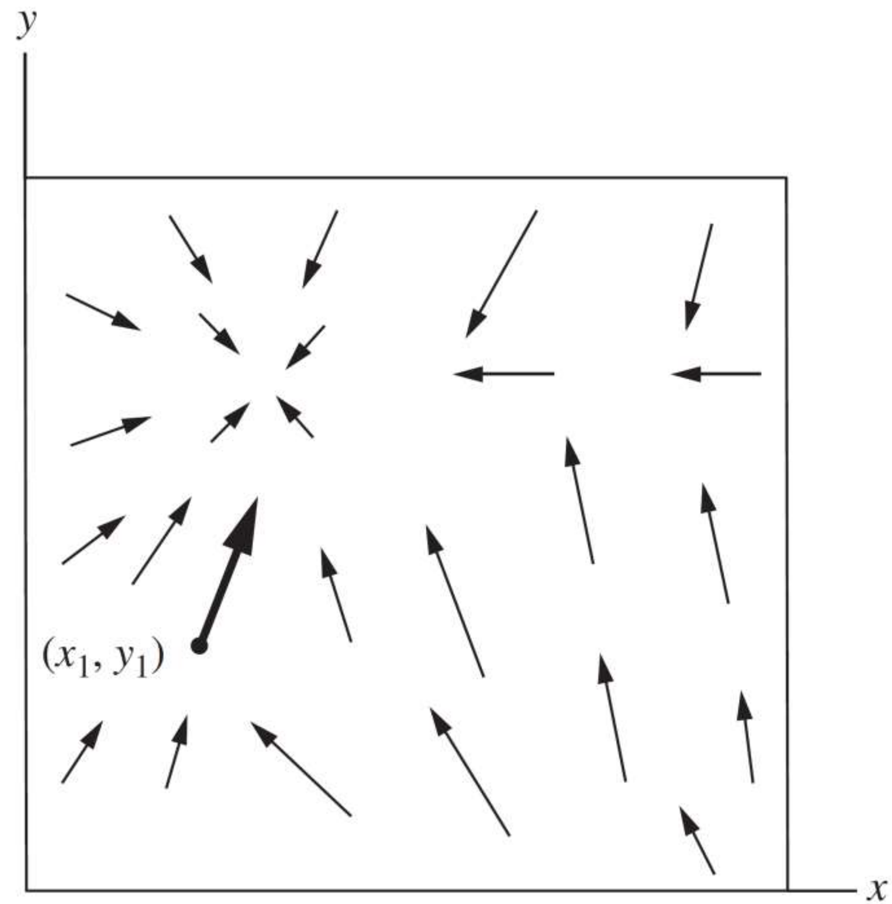
或者 $$\nabla r=\frac{\partial r}{\partial r}\hat{r}=1\cdot\hat{r}$$



➡ $\nabla r=\hat{r}$



f(x, y)
(x1, y1)
Direction of
steepest slope
x



y
(x1, y1)
x

三、梯度算子

- 定义**梯度算子**

$$\nabla \triangleq \hat{x}\frac{\partial}{\partial x}+\hat{y}\frac{\partial}{\partial y}+\hat{z}\frac{\partial}{\partial z}=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

- 性质：
  - **It looks like a vector.**
  - **It works like a vector.**
  - **It's an operator.**

$$\vec{A}\varphi=\varphi A_x\hat{x}+\varphi A_y\hat{y}+\varphi A_z\hat{z}=\varphi\vec{A}$$

$$\vec{A}\cdot\vec{F}=A_xF_x+A_yF_y+A_zF_z=\vec{F}\cdot\vec{A}$$

$$\vec{A}\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ A_x & A_y & A_z\\ F_x & F_y & F_z\end{vmatrix}=-\vec{F}\times\vec{A}$$

- ∇ 可以作用于标量及矢量函数上
  - 作用于标量函数：梯度 $\nabla\varphi \to$ 矢量
  - 点乘作用于矢量函数：散度 $\nabla\bullet\vec{F} \to$ 标量
  - 叉乘作用于矢量函数：旋度 $\nabla\times\vec{F} \to$ 矢量

$$\nabla\varphi\neq\varphi\nabla$$

$$\nabla\cdot\vec{F}\neq\vec{F}\cdot\nabla$$

$$\nabla\times\vec{F}\neq-\vec{F}\times\nabla$$

四、矢量场的散度

- 矢量场 $\vec{F}(\vec{r}) = \vec{F}(x, y, z) = F_x\hat{x} + F_y\hat{y} + F_z\hat{z}$ 的**散度**定义为

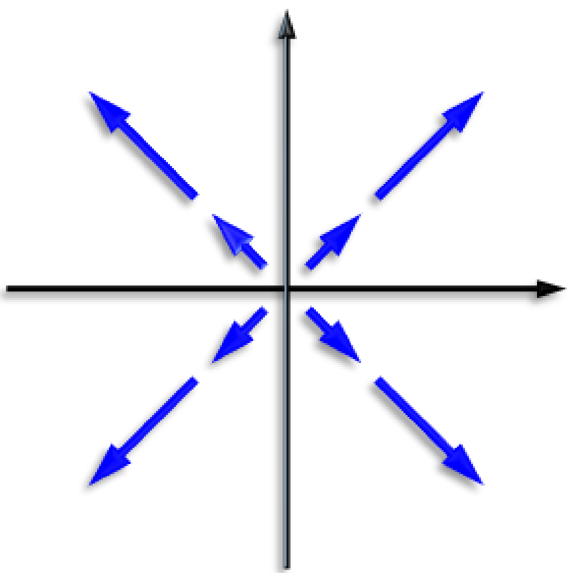
$$\operatorname{div} \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F} \triangleq \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = \partial_x F_x + \partial_y F_y + \partial_z F_z$$

$$\partial_x \triangleq \frac{\partial}{\partial x}, \quad \partial_y \triangleq \frac{\partial}{\partial y}, \quad \partial_z \triangleq \frac{\partial}{\partial z}$$

- 矢量场的散度是一个标量场。

- 几何意义：散度(divergence) 量度矢量 $\vec{F}(\vec{r})$ 在 $\boldsymbol{r}$ 点附近是否发散或汇聚

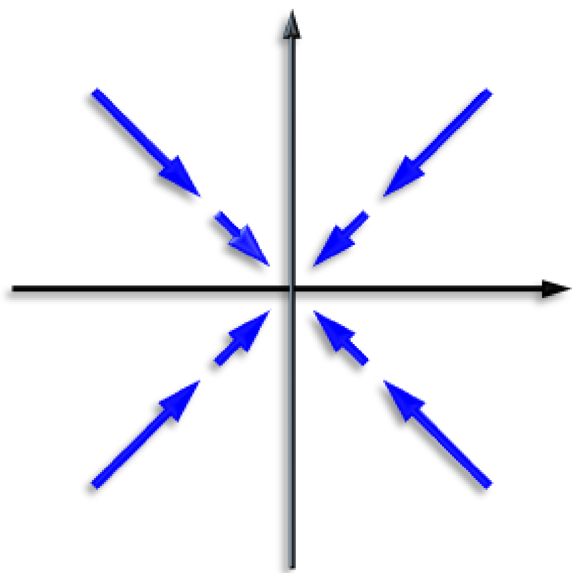
$\vec{F} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$



$\nabla \cdot \vec{F} = +3 > 0$

（源）

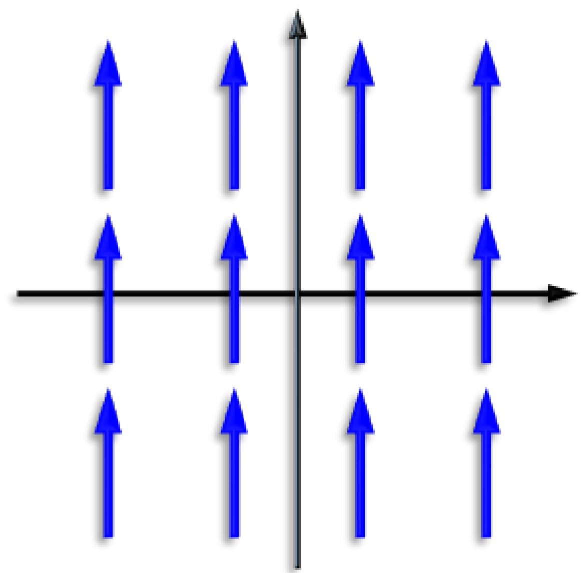
$\vec{F} = -x\hat{x} - y\hat{y} - z\hat{z}$



$\nabla \cdot \vec{F} = -3 < 0$

（汇）

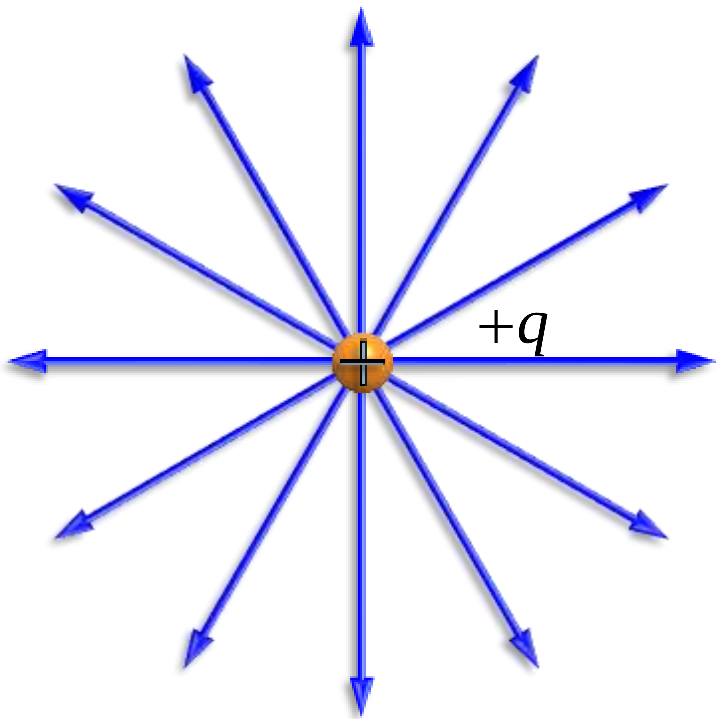
$\vec{F} = \hat{y}$



$\nabla \cdot \vec{F} = 0$

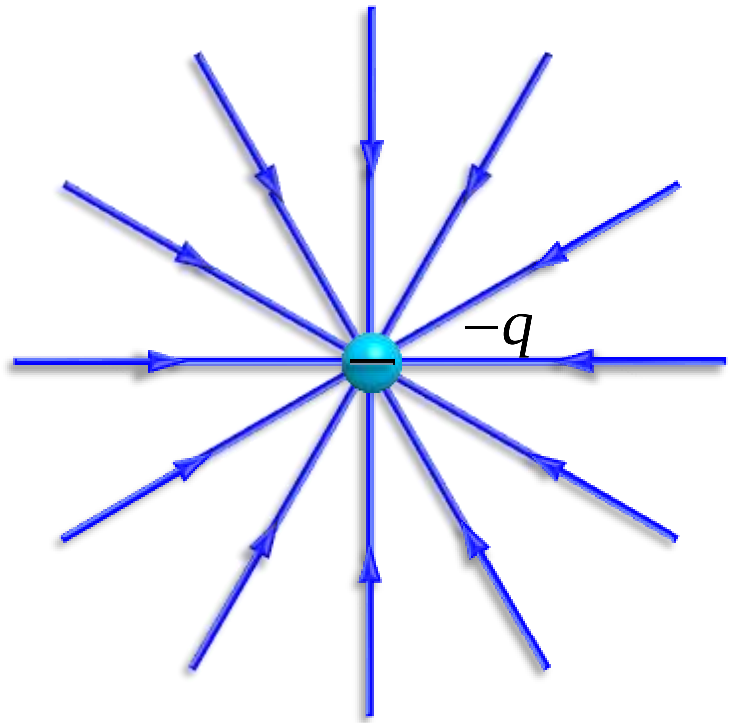
（无源）

有源



$\nabla \cdot \vec{E} > 0$

（正电荷为源）



$\nabla \cdot \vec{E} < 0$

（负电荷为源）

静电场是有源场

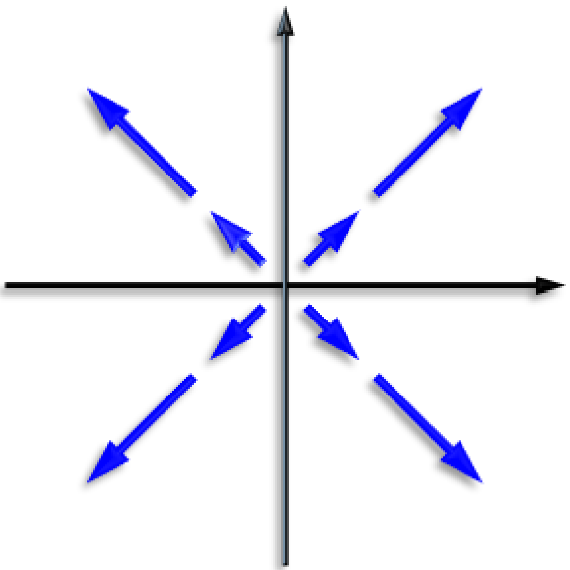
五、矢量场的旋度

- 矢量场 $\vec{F}(\vec{r})=\vec{F}(x,y,z)=F_x\hat{x}+F_y\hat{y}+F_z\hat{z}$ 的**旋度**定义为

$$\operatorname{curl}\vec{F}=\nabla\times\vec{F}\triangleq\begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ \partial_x & \partial_y & \partial_z\\ F_x & F_y & F_z\end{vmatrix}\quad \text{or}\quad \begin{cases}\left(\nabla\times\vec{F}\right)_x=\partial_y F_z-\partial_z F_y\\ \left(\nabla\times\vec{F}\right)_y=\partial_z F_x-\partial_x F_z\\ \left(\nabla\times\vec{F}\right)_z=\partial_x F_y-\partial_y F_x\end{cases}$$

- 矢量场的旋度仍然是一个矢量场。
- 几何意义：旋度量度矢量 $\vec{F}(\vec{r})$ 在 $\boldsymbol{r}$ 点附近是否旋转

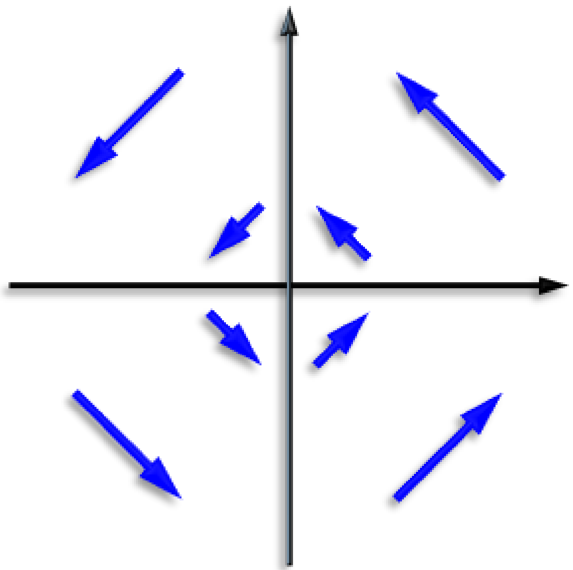
$$\vec{F} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$$



$$\nabla \times \vec{F} = 0$$

(无旋)

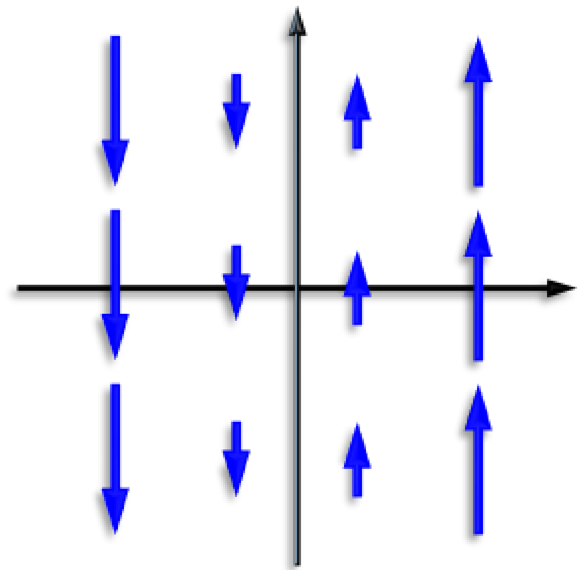
$$\vec{F} = -y\hat{x} + x\hat{y}$$



$$\nabla \times \vec{F} = 2\hat{z}$$

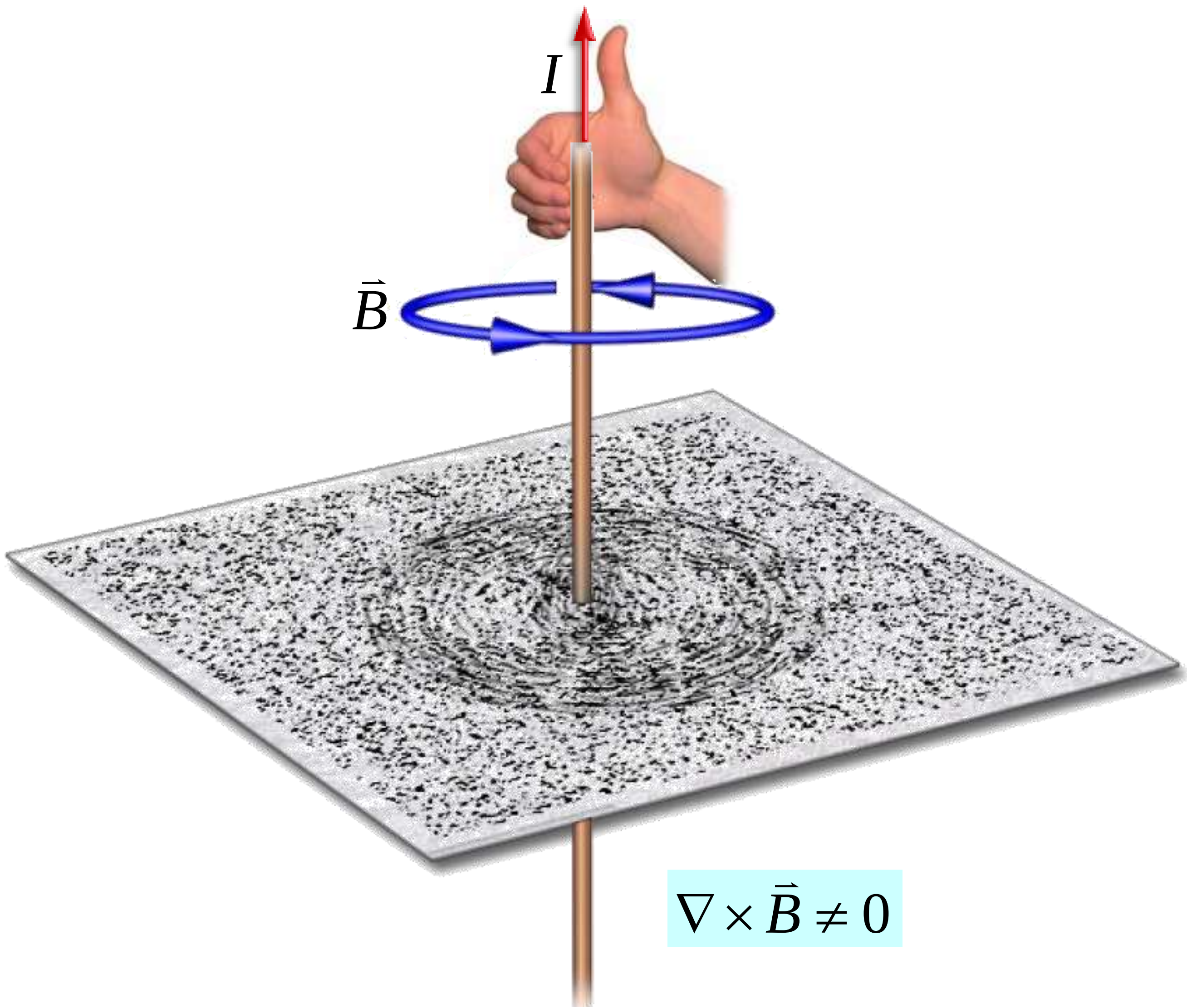
(有旋)

$$\vec{F} = x\hat{y}$$



$$\nabla \times \vec{F} = \hat{z}$$

(有旋)



静磁场是有旋场

小结

梯度算子 $$\nabla \triangleq \hat{x}\frac{\partial}{\partial x}+\hat{y}\frac{\partial}{\partial y}+\hat{z}\frac{\partial}{\partial z}=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

- **梯度(矢量场)：** $$\nabla\varphi \triangleq \frac{\partial\varphi}{\partial x}\hat{x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\hat{y}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\hat{z}=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x},\frac{\partial\varphi}{\partial y},\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)$$

- **散度(标量场)：** $$\nabla\cdot F \triangleq \frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}+\frac{\partial F_z}{\partial z}$$

- **旋度(矢量场)：** $$\nabla\times\vec{F} \triangleq \begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ \partial_x & \partial_y & \partial_z\\ F_x & F_y & F_z\end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &\quad\ \hat{x}\left(\partial_y F_z-\partial_z F_y\right)\\ &= +\hat{y}\left(\partial_z F_x-\partial_x F_z\right)\\ &\quad +\hat{z}\left(\partial_x F_y-\partial_y F_x\right)\end{aligned}$$

回顾

几何意义：

- **梯度(矢量)**：指向标量场 f 增加最快方向（$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial n}\hat{n}$ **n**)

$\hat{n}$ ：单位矢量也

- **散度(标量)**：散度(divergence) 量度矢量场 $\vec{F}(\vec{r})$ 在某点附近是否发散或汇聚

- **旋度(矢量)**：旋度量度矢量场 $\vec{F}(\vec{r})$ 在某点附近是否旋转

回顾

性质：

- **It looks like a vector.**
- **It works like a vector.**
- **It's an operator.**

$\nabla(af) = a\nabla f$ a is constant

$\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g$

$\nabla(f * g) = (\nabla f) * g + f * \nabla g$

$\nabla(\vec{B} \bullet \vec{A}) = ?$

回顾

一些简单结论和法则

$$\vec{A}\times\vec{A}=0$$

$$\vec{A}\bullet(\vec{A}\times\vec{B})=0$$

$$\vec{A}\bullet(\vec{B}\times\vec{C})=(\vec{A}\times\vec{B})\bullet\vec{C}$$

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=\vec{B}(\vec{A}\bullet\vec{C})-\vec{C}(\vec{A}\bullet\vec{B})$$

- **拉普拉斯算法**（二阶偏微分）：

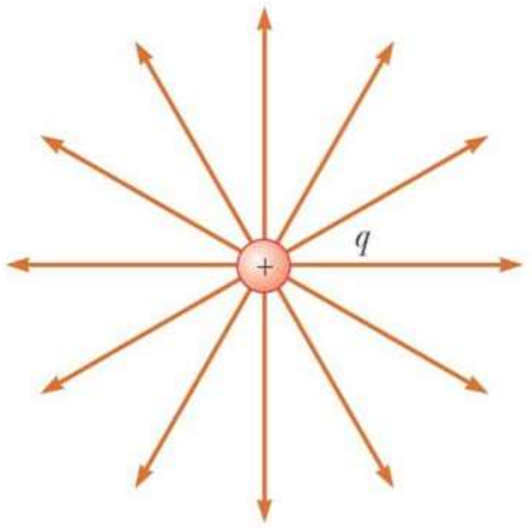
$$\nabla\cdot(\nabla f)=\nabla^2 f=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)f$$

回顾

- **梯度场无旋** $\nabla\times(\nabla f)=0$

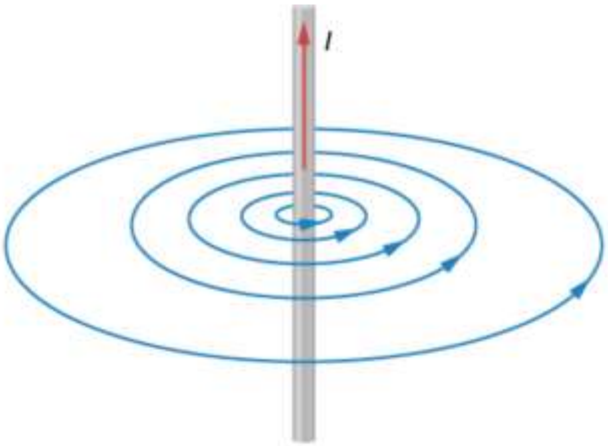
证明：考虑其x分量

$$\left[\nabla\times(\nabla f)\right]_x=\nabla_y(\nabla f)_z-\nabla_z(\nabla f)_y$$
$$=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial z}f\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial y}f\right)=0$$



- **旋度场无源** $\nabla\cdot(\nabla\times\vec{A})=0$

- **旋度场的旋度** $\nabla\times(\nabla\times\vec{A})=\nabla(\nabla\cdot\vec{A})-\nabla^2\vec{A}$



请自己证明

数学小贴士

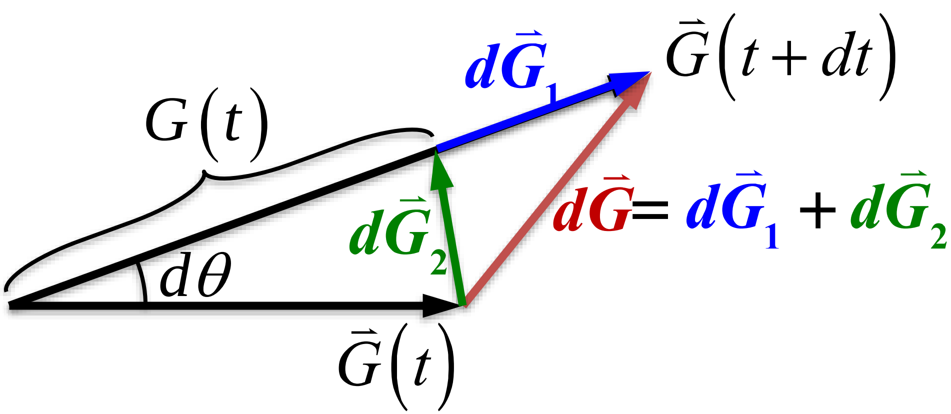
- 对于标量函数 $f(x)$： $df^2 = 2fdf$
- 对于矢量函数 $\boldsymbol{G}$:

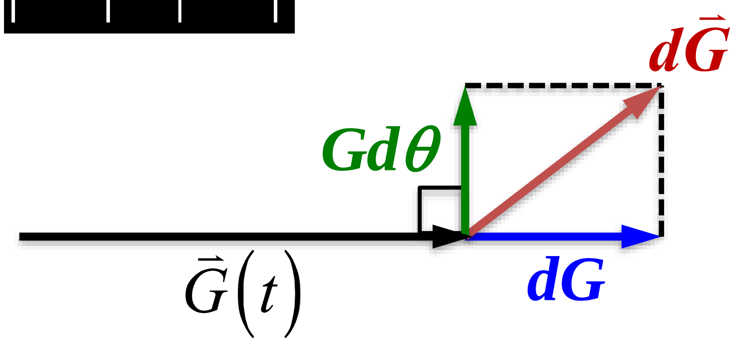
$$2G_x dG_x + 2G_y dG_y + 2G_z dG_z = d\left(G_x^2 + G_y^2 + G_z^2\right)$$

$$\Rightarrow 2\vec{G}\cdot d\vec{G} = d\left(\vec{G}\cdot\vec{G}\right) = dG^2 = 2GdG$$

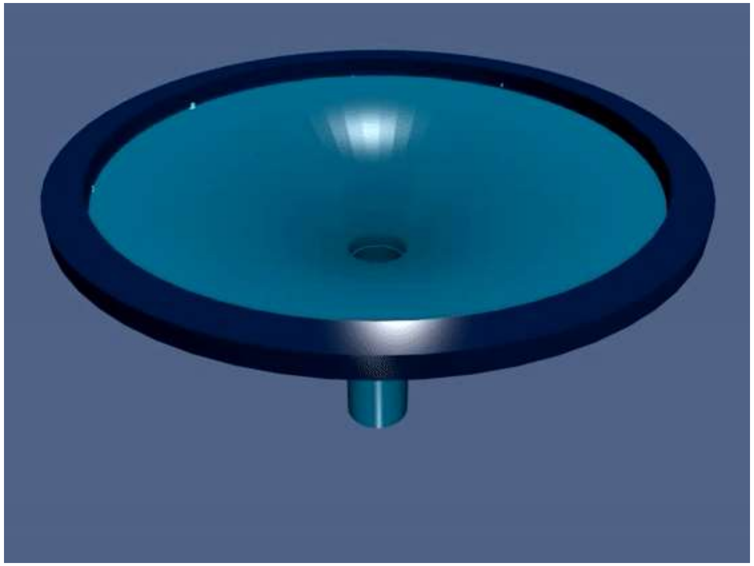
$$\Rightarrow \boxed{\vec{G}\cdot d\vec{G} = GdG}$$

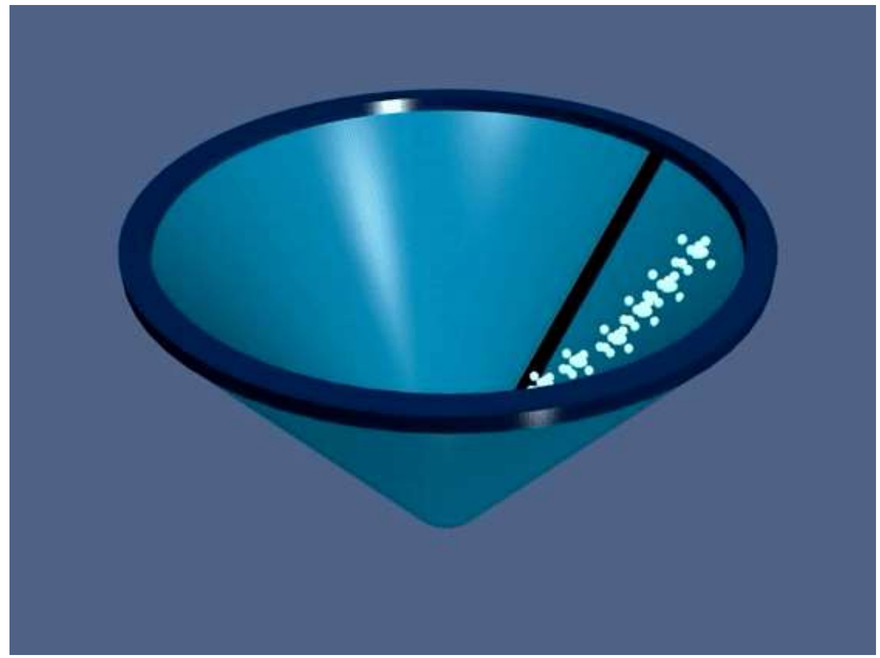
$$\left|d\vec{G}\right| \neq \left|dG\right|$$

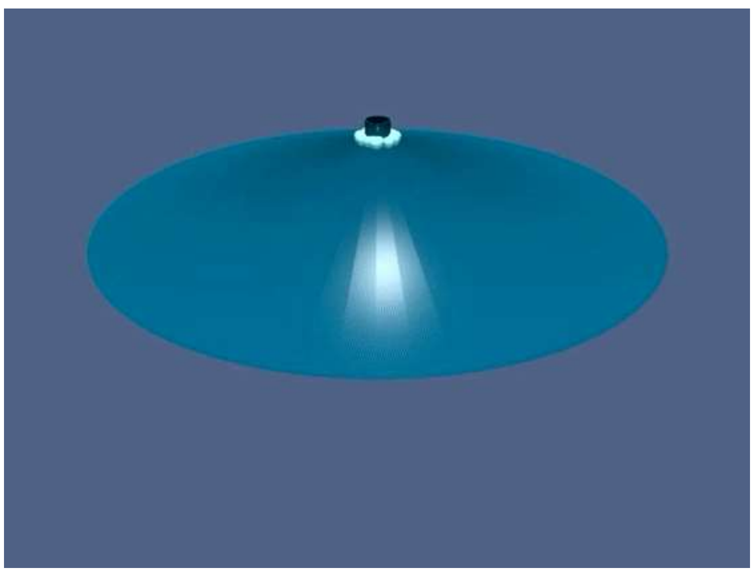




§0.3 矢量场的积分

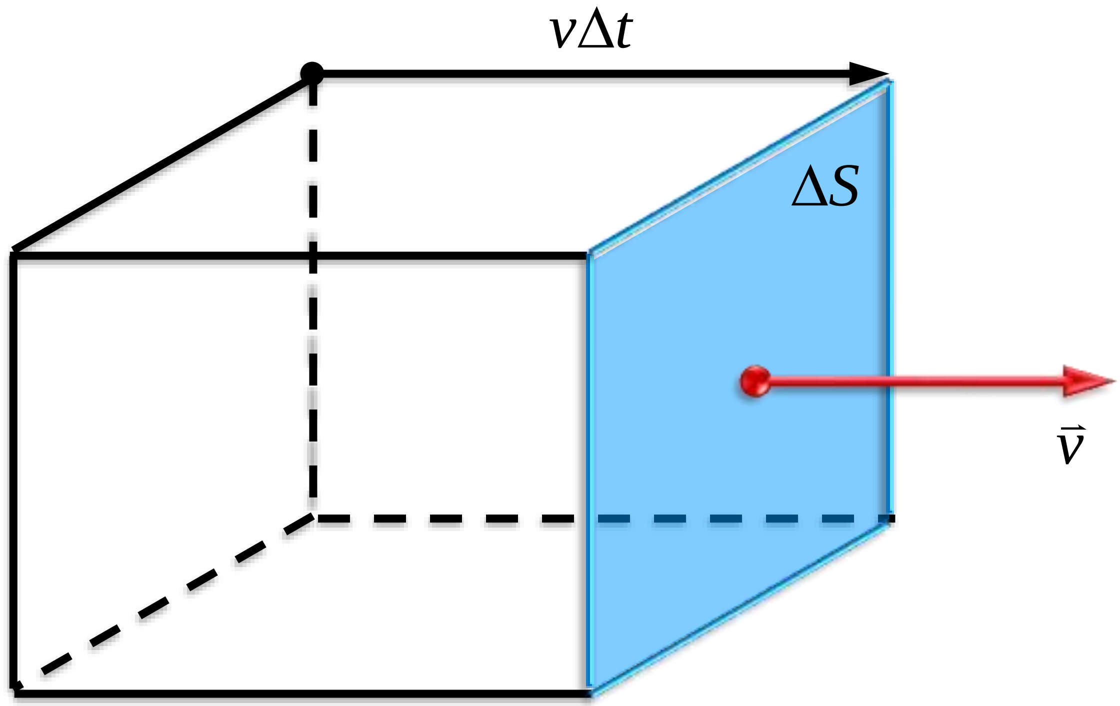






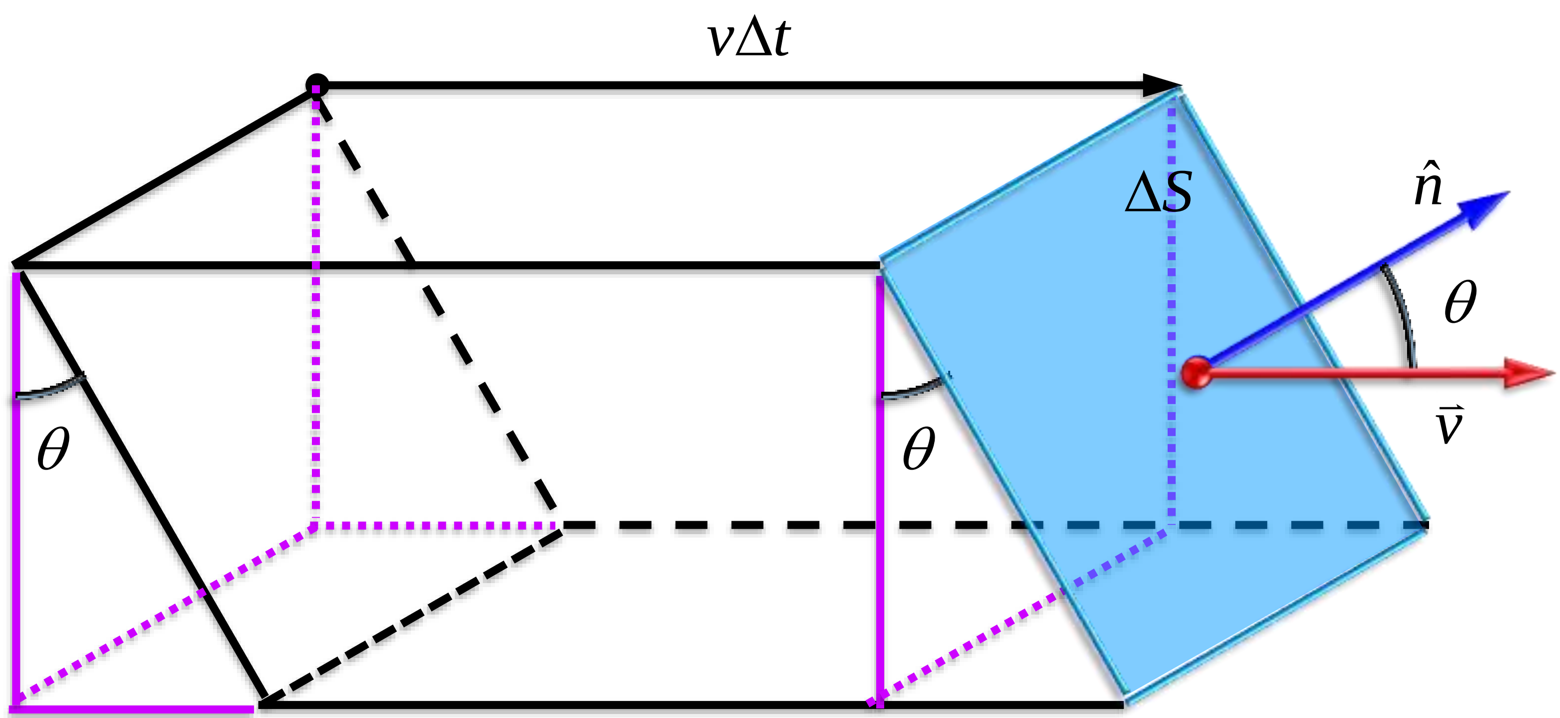
水流的源与汇

- 穿过闭曲面 S 的**水流通量 Φ_v**：
  单位时间从闭曲面 S 流出去的水的体积
  - $\Phi_v > 0$：S 内存在水流的源
    $\Phi_v < 0$：S 内存在水流的汇
- **如何计算 Φ_v？**
  等于从每一个面元流出去的水量的代数和
  - 对于闭曲面，以外法向为面元方向



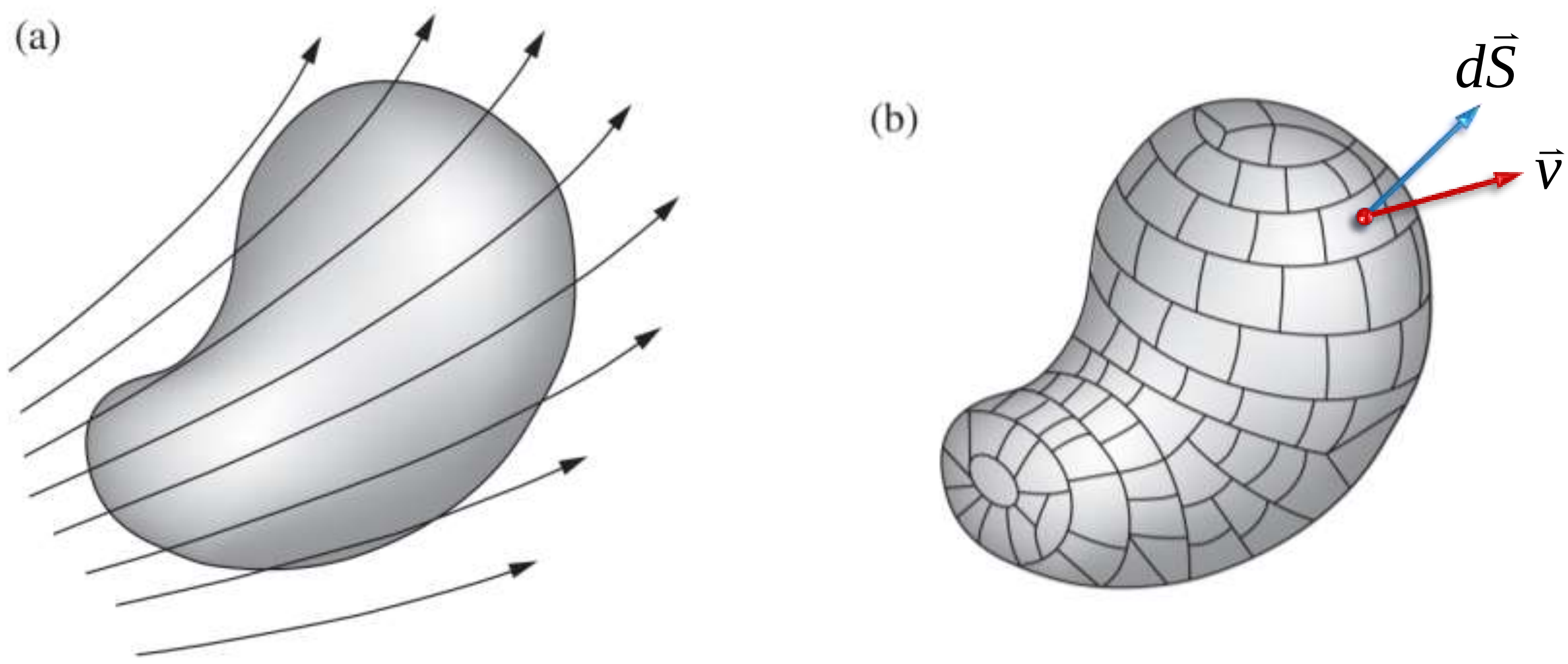
单位时间内通过面元 ΔS 的水量为

$$\frac{v\Delta t\Delta S}{\Delta t}=v\Delta S$$



单位时间内通过面元 ΔS 的水量为

$$\frac{v\Delta t\Delta S\cos\theta}{\Delta t} = v\Delta S\cos\theta = \vec{v}\cdot\Delta\vec{S}$$



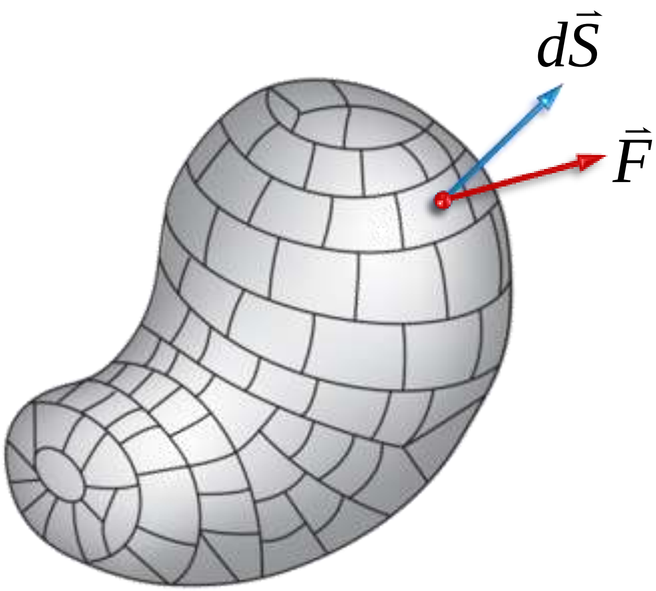
穿过闭曲面 S 的**水流通量**：

$$\Phi_v = \lim_{\Delta S \to 0} \sum \vec{v} \cdot \Delta\vec{S} = \oiint_S \vec{v} \cdot d\vec{S}$$

一、矢量场的通量

矢量场 $\vec{F}=\vec{F}(x,y,z)$ 穿过闭曲面 S 的**通量**定义为

$$\Phi_F \triangleq \oiint_S \vec{F}\cdot d\vec{S}$$



- 闭曲面以外法向为正方向
- 物理含义：

  $\Phi_F>0$：S 内有 F 的**源；**

  $\Phi_F<0$：S 内有 F 的**汇。**

- 若对**任意**闭曲面均有 $\Phi_F=0$，则称 F 为**无源场**

  只要**存在一个**闭曲面使得 $\Phi_F\neq 0$，则称 F 为**有源场**

【例】 穿过小的长方体边界的通量。

【解】 （1）穿过前后两个面的通量

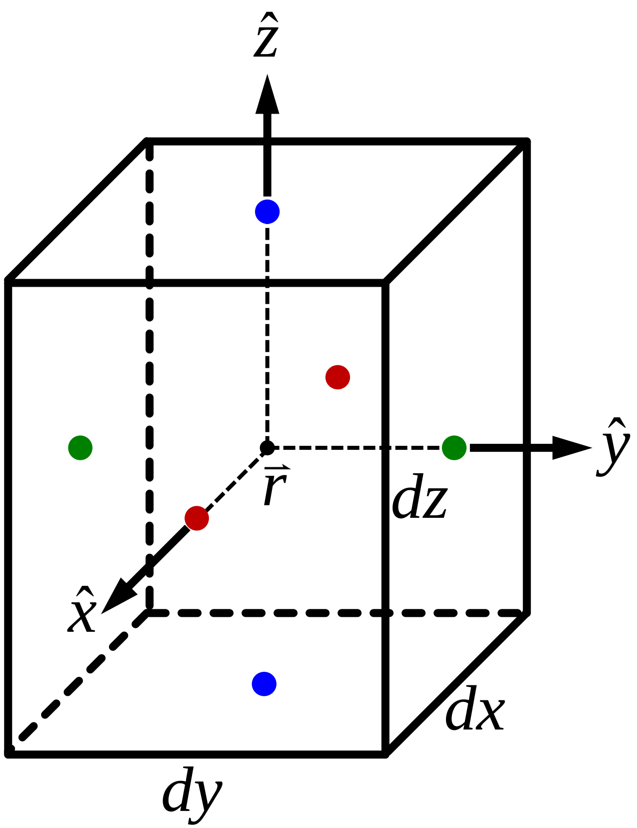
$$\left[F_x(x+\frac{1}{2}dx,y,z)-F_x(x-\frac{1}{2}dx,y,z)\right]dydz$$

（2）穿过左右两个面的通量

$$\left[F_y(x,y+\frac{1}{2}dy,z)-F_y(x,y-\frac{1}{2}dy,z)\right]dzdx$$

（3）穿过上下两个面的通量

$$\left[F_z(x,y,z+\frac{1}{2}dz)-F_z(x,y,z-\frac{1}{2}dz)\right]dxdy$$



$$\Longrightarrow \oiint_S \vec{F}\cdot d\vec{S}=\left(\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}+\frac{\partial F_z}{\partial z}\right)dxdydz$$

二、矢量场的散度

矢量场 $\vec{F}=\vec{F}(x,y,z)$ 的**散度**定义为

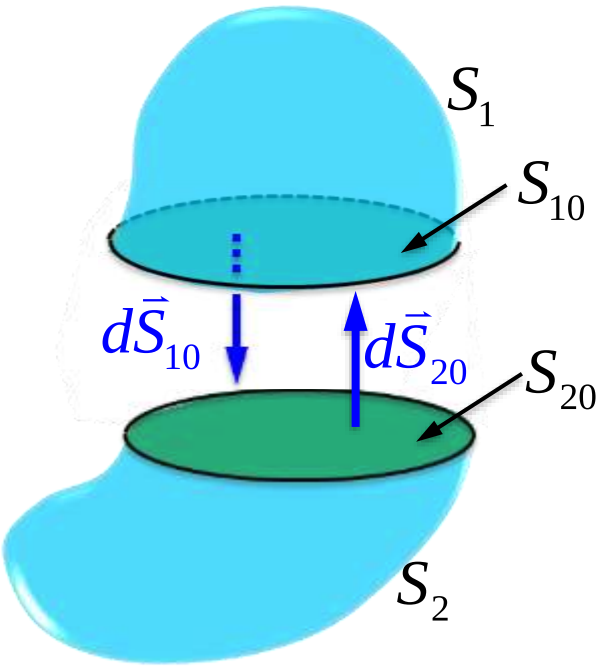
$$\nabla\cdot\vec{F}\triangleq\lim_{V\to 0}\left[\frac{1}{V}\oiint_{S=\partial V}\vec{F}\cdot d\vec{S}\right]$$

- 若 $\boldsymbol{F}$ 在某点的散度不为零，则 $\boldsymbol{F}$ 由该点发射或汇聚
- 若 $\boldsymbol{F}$ 的散度处处为零，则 $\boldsymbol{F}$ 为**无源场**
- 散度在直角坐标系下的表达式

$$\nabla\cdot\vec{F}=\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}+\frac{\partial F_z}{\partial z}$$

将 S 所围区域切割为边界分别为 S_1 和 S_1 的两个区域

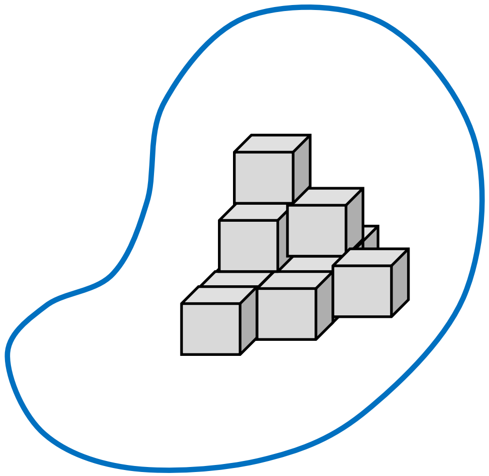
$$\oiint_S \vec{F}\cdot d\vec{S} = \oiint_{S_1} \vec{F}\cdot d\vec{S} - \iint_{S_{10}} \vec{F}\cdot d\vec{S}$$
$$+ \oiint_{S_2} \vec{F}\cdot d\vec{S} - \iint_{S_{20}} \vec{F}\cdot d\vec{S}$$
$$= \oiint_{S_1} \vec{F}\cdot d\vec{S} + \oiint_{S_2} \vec{F}\cdot d\vec{S}$$



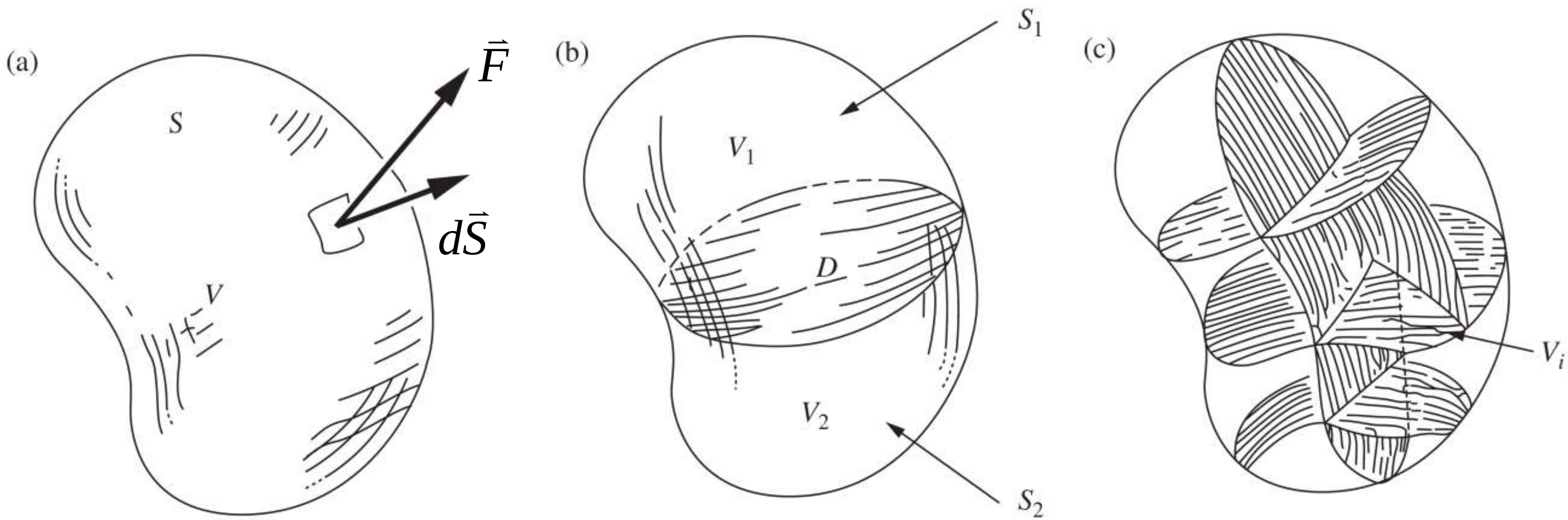
$$\Rightarrow \quad \Phi = \Phi_1 + \Phi_2$$

将 S 所围区域切割成更多的小块，则有

$$\Phi = \sum_{i=1}^{N} \Phi_i = \sum_{i=1}^{N} \oiint_{S_i} \vec{F}\cdot d\vec{S} = \sum_{i=1}^{N} V_i \frac{\oiint_{S_i} \vec{F}\cdot d\vec{S}}{V_i}$$



三、高斯（Gauss）定理



散度积分的基本定理—— **高斯定理**

$$\oiint_{S=\partial V} \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iiint_V \nabla\cdot\vec{F}\,dV$$

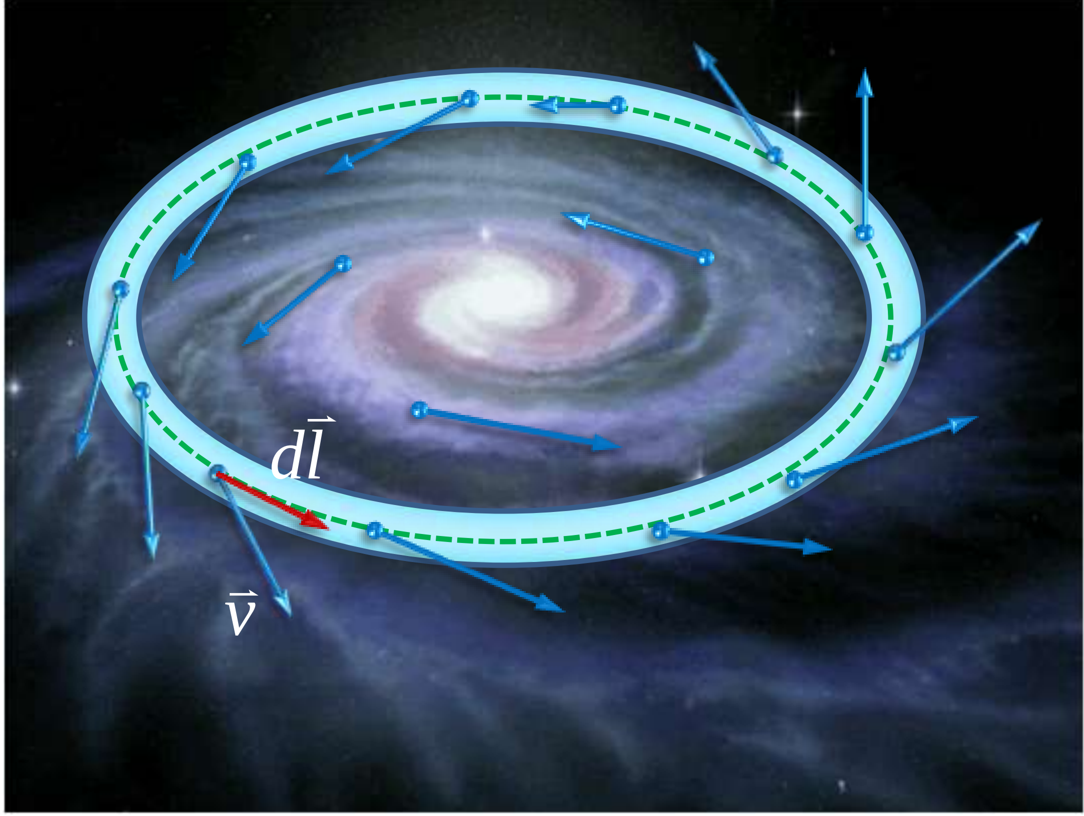
水流的涡旋

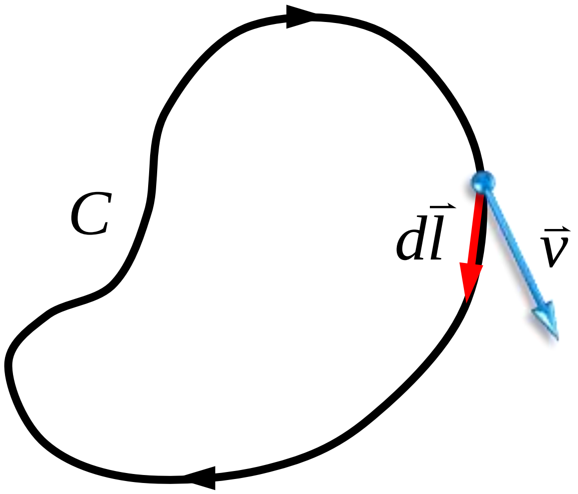
- 水流速度场的**环量**：

$$\Gamma_v \triangleq \lim_{\Delta l \to 0} \sum \vec{v} \cdot \Delta \vec{l}$$

$$= \oint_C \vec{v} \cdot d\vec{l}$$

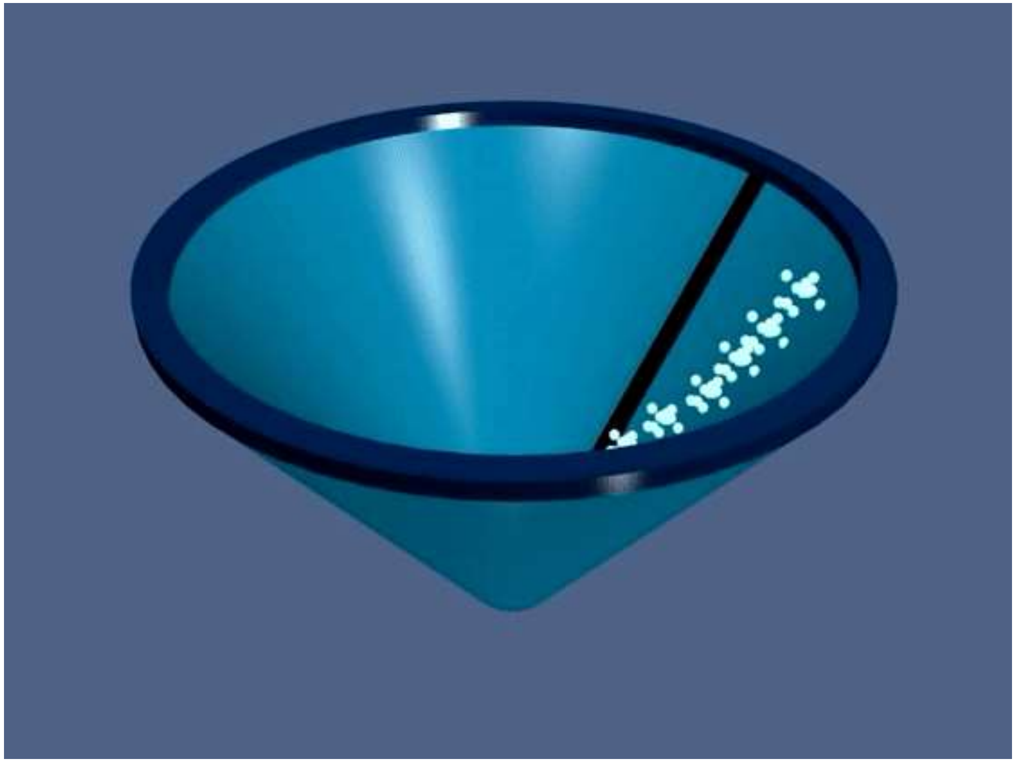
$$= \oint_C v \cos\theta \, dl$$





【例】 $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$

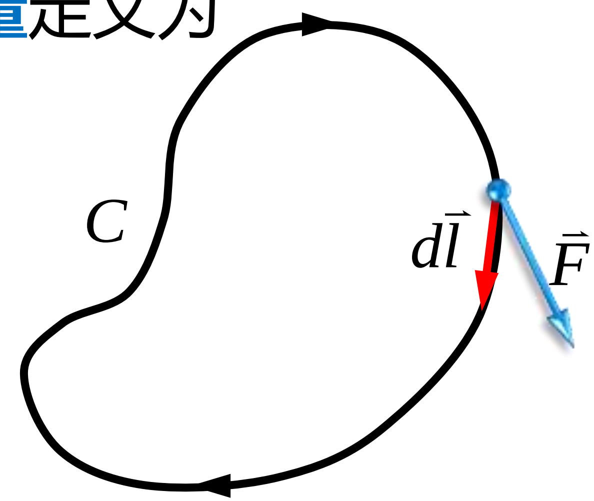
$$\Gamma_v = v \cdot 2\pi R = 2\pi\omega R^2$$



四、矢量场的环量

矢量场 $\vec{F}=\vec{F}(x,y,z)$ 绕闭曲线 C 的**环量**定义为

$$\Gamma_F \triangleq \oint_C \vec{F}\cdot d\vec{l}$$



- 任意约定闭曲线的绕行方向为正，
  绕行方向决定了线元的方向
- $\Gamma_F>0$：在 C 上 $\boldsymbol{F}$ 的转动与 C 的绕行方向一致
- 若对**任意**闭曲线均有 $\Gamma_F = 0$，则称 $\boldsymbol{F}$ 为**无旋场**

  只要**存在一条**闭曲线使得 $\Gamma_F\neq 0$，则称 $\boldsymbol{F}$ 为**有旋场**

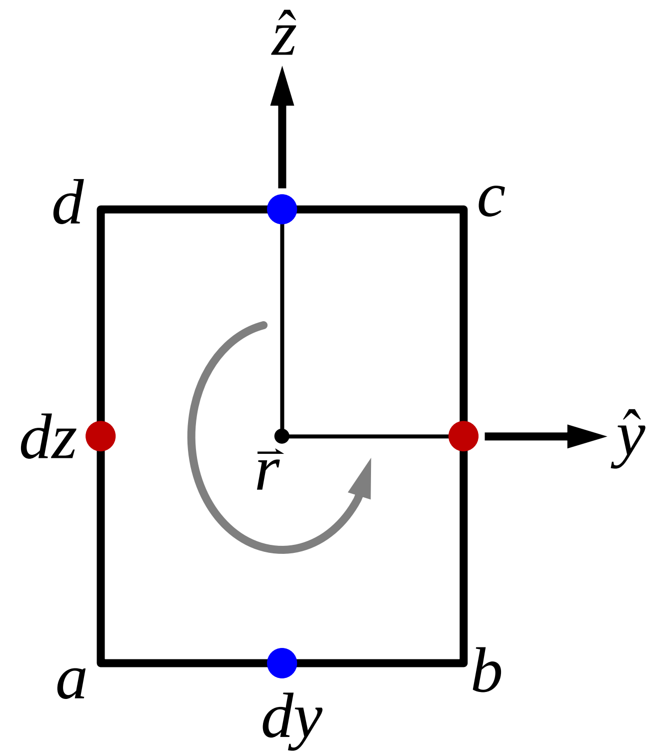
【例】绕小的长方形边界的环量。

【解】（1）左右两边对环量的贡献

$$\left[F_z(x,y+\frac{1}{2}dy,z)-F_z(x,y-\frac{1}{2}dy,z)\right]dz$$

（2）上下两边对环量的贡献

$$\left[F_y(x,y,z-\frac{1}{2}dz)-F_y(x,y,z+\frac{1}{2}dz)\right]dy$$



$$\Rightarrow \oiint_S \vec{F}\cdot d\vec{S}=\left(\frac{\partial F_z}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial z}\right)dydz$$

对于一般的无限小的闭曲线：

$$\oiint_S \vec{F}\cdot d\vec{S}=\left(\frac{\partial F_z}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial z}\right)dydz+\left(\frac{\partial F_x}{\partial z}-\frac{\partial F_z}{\partial x}\right)dzdx+\left(\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}\right)dxdy$$

五、矢量场的旋度

矢量场 $\vec{F}=\vec{F}(x,y,z)$ 的**旋度（在 n 方向投影）**定义为

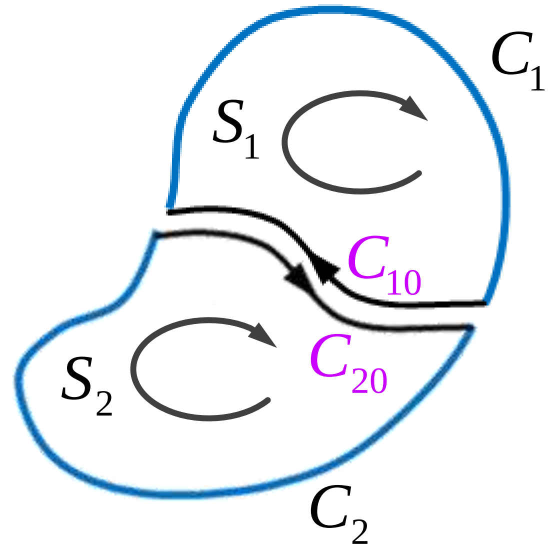
$$\hat{n}\cdot(\nabla\times\vec{F}) \triangleq \lim_{S\to 0}\left[\frac{1}{S}\oint_{C=\partial S}\vec{F}\cdot d\vec{l}\right]$$

- 若 $\boldsymbol{F}$ 在某点的旋度不为零，则 $\boldsymbol{F}$ 在该点附近有涡旋
- 若 $\boldsymbol{F}$ 的旋度处处为零，则 $\boldsymbol{F}$ 为**无旋场**
- 旋度在直角坐标系下的表达式

$$\nabla\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\hat{x} & \hat{y} & \hat{z}\\ \partial_x & \partial_y & \partial_z\\ F_x & F_y & F_z\end{vmatrix}$$

将 C 所围区域切割为边界分别为 C_1 和 C_1 的两个区域

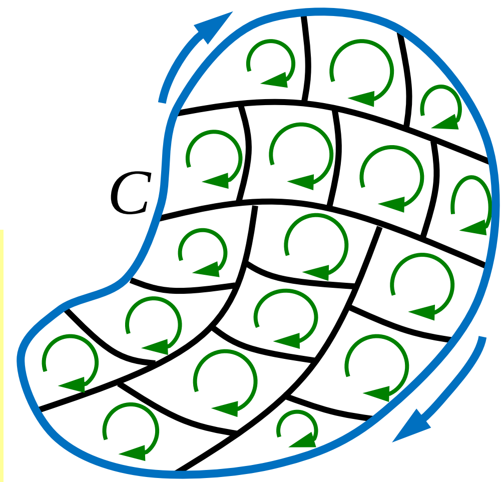
$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{l} = \oint_{C_1} \vec{F}\cdot d\vec{l} - \int_{C_{10}} \vec{F}\cdot d\vec{l}$$
$$+ \oint_{C_2} \vec{F}\cdot d\vec{l} - \int_{C_{20}} \vec{F}\cdot d\vec{l}$$
$$= \oint_{C_1} \vec{F}\cdot d\vec{l} + \oint_{C_2} \vec{F}\cdot d\vec{l}$$



$$\Rightarrow \quad \Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$$

将 C 所围区域切割成更多的小块，则有

$$\Gamma = \sum_{i=1}^{N} \Gamma_i = \sum_{i=1}^{N} \oint_{C_i} \vec{F}\cdot d\vec{l} = \sum_{i=1}^{N} S_i \frac{\oint_{C_i} \vec{F}\cdot d\vec{l}}{S_i}$$

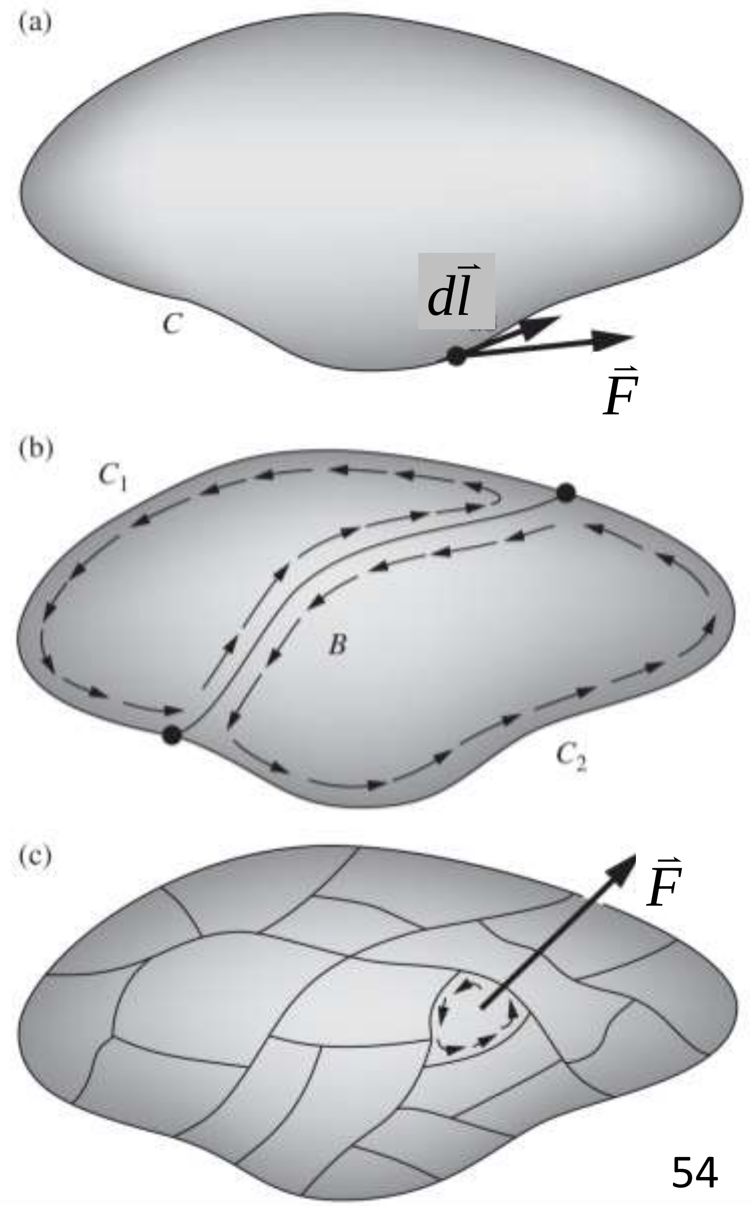


六、斯托克斯（Stokes）定理

散度积分的基本定理

—— **Stokes定理**

$$\oint_{C=\partial S} \vec{F}\cdot d\vec{l} = \iint_S (\nabla\times\vec{F})\cdot d\vec{S}$$



高斯定理与斯托克斯定理的例题

【例】请直接计算以及用高斯定理计算积分

$$\oiint_S \vec{F}\cdot d\vec{S}, \text{其中} \vec{F} = yx^2\hat{x} + (xy^2 - 3z^4)\hat{y} + (x^3 + y^3)\hat{z}$$

其中，S是$\frac{1}{4}$球面:$\{x^2 + y^2 + z^2 = 16, y \le 0, z \le 0\}$.

【解】直接计算

分成3个面：$z = 0$面，$y = 0$面和剩下的$\frac{1}{4}$球面

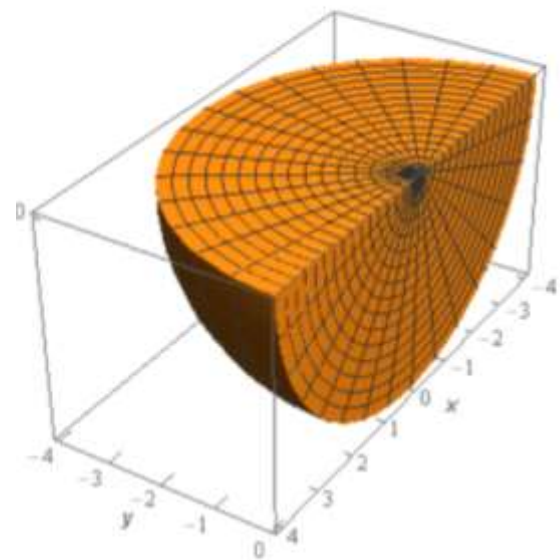
(1) $z = 0$面：

$$d\vec{S} = \hat{z}dxdy$$

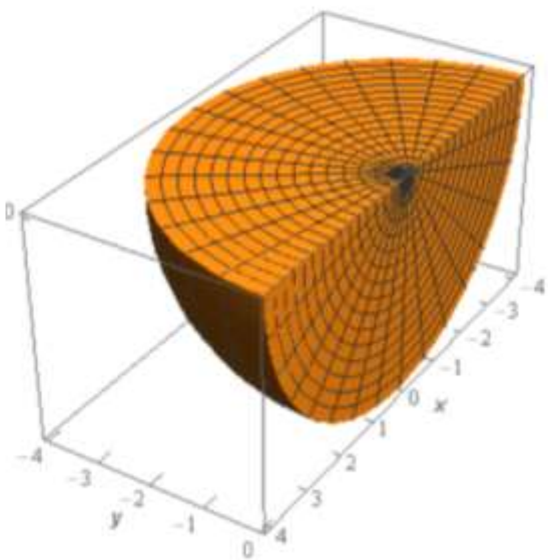
积分为

$$\iint (x^3 + y^2)dxdy$$

用重积分方法，计算出结果为32π



例题



(2)$y=0$面：$d\vec{S}=\hat{y}dxdz$

积分为

$$\iint (xy^2-3z^4)dzdx=-768\pi。$$

(3) 1/8球面：法线方向是$\hat{r}$，用球坐标，积分为

$$\iint F_r\cdot r^2 sin\theta d\theta d\phi$$

其中，$r^2 sin\theta d\theta d\phi$是球面面元$dS$的微分写法；

积分区域是这个球面。

利用直角和球坐标基矢的关系

$$\hat{x}=\hat{r}sin\theta cos\phi+\hat{\theta}cos\theta cos\phi-\hat{\phi}sin\phi$$

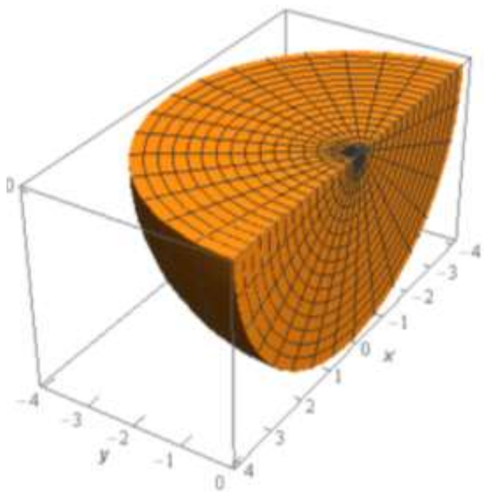
$$\hat{y}=\hat{r}sin\theta sin\phi+\hat{\theta}cos\theta sin\phi+\hat{\phi}cos\phi$$

$$\hat{z}=\hat{r}cos\theta-\hat{\theta}sin\theta$$

可求出F在r方向上的分量，进而用直角和球坐标的换元计算出这个积分的结果为736π。

总的积分最后的结果为0。

例题



用高斯定理计算：

$$\oiint_{\partial D} \vec{\boldsymbol{A}} \cdot \boldsymbol{d}\vec{\boldsymbol{S}} = \iiint_{D} \boldsymbol{\nabla} \cdot \vec{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{d}\boldsymbol{V}$$

由$\nabla \cdot \vec{F} = \partial_x(yx^2) + \partial_y(xy^2 - 3z^4) + \partial_z(x^3 + y^2)$
$= 4xy$

所以

$$\oiint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint 4xydV$$

体积积分区域为闭合曲面S内部包围的区域。

观察这个区域，发现它关于x对称，体积分就是0。

例题

【例】 计算环路积分$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$，其中$\vec{F}=z^2\hat{x}+y^2\hat{y}+x\hat{z}$，闭合曲线$C$为在顶点(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)上逆时针方向旋转的三角形，分别通过直接计算和使用斯托克斯定理求解。

【解】 **直接计算：** 如图所示，ΔABC为所计算积分的环路

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_{AB}\vec{F}\cdot d\vec{r}+\int_{BC}\vec{F}\cdot d\vec{r}+\int_{CA}\vec{F}\cdot d\vec{r}$$

AB线段的表达:

$$x=1-t, y=t, z=0\ (0\le t<1)$$

即，$\vec{r}(t)=(1-t)\hat{x}+t\hat{y}+0\hat{z}$

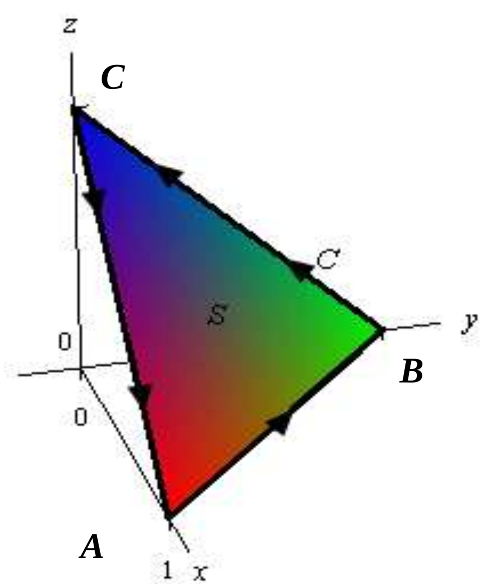
线元为:

$$d\vec{r}(t)=\frac{d\vec{r}(t)}{dt}dt=(-\hat{x}+\hat{y}+0\hat{z})dt$$

$\vec{F}$在xy面的表达:

$$\vec{F}=0\hat{x}+t^2\hat{y}+(1-t)\hat{z}$$

积分为： $\int_{AB}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_0^1 t^2 dt=\frac{1}{3}$



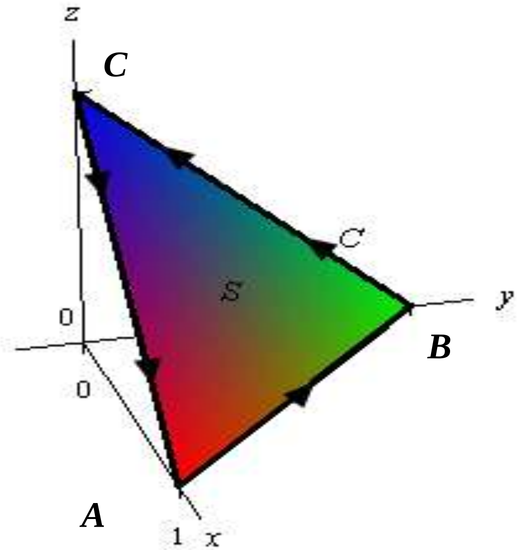
对BC段: $x=0,\ y=1-t, z=t(0\leq t<1)$

即曲线AB上: $\vec{r}(t)=0\hat{x}+(1-t)\hat{y}+t\hat{z}$

$$d\vec{r}(t)=\frac{d\vec{r}(t)}{dt}dt=(0\hat{x}-\hat{y}+\hat{z})dt$$

$$\vec{F}=t^2\hat{x}+(1-t)^2\hat{y}+0\hat{z}$$

$$\int_{BC}\vec{F}\cdot d\vec{r}=-\int_0^1(1-t)^2dt=-\frac{1}{3}$$



对CA段: $x=t,\ y=0, z=1-t(0\leq t<1)$

即曲线 AB上: $\vec{r}(t)=t\hat{x}+0\hat{y}+(1-t)\hat{z}$

$$d\vec{r}(t)=\frac{d\vec{r}(t)}{dt}dt=(\hat{x}+0\hat{y}-\hat{z})dt$$

$$\vec{F}=(1-t)^2\hat{x}+0\hat{y}+t\hat{z}$$

$$\int_{BC}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_0^1[(1-t)^2-t]dt=\int_0^1(t^2-3t+1)=-\frac{1}{6}$$

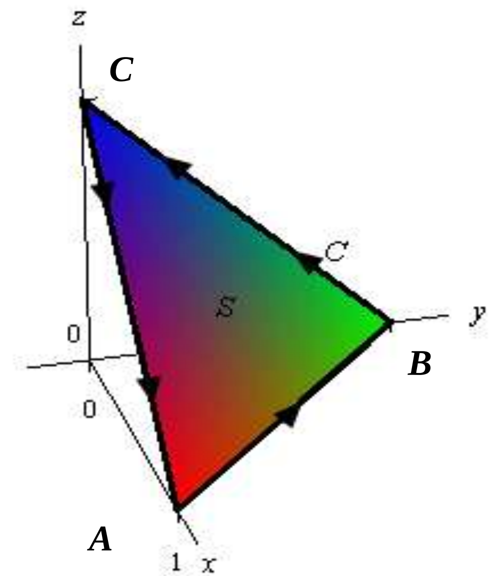
综上, $\oint_C\vec{F}\cdot d\vec{r}=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}-\frac{1}{6}=-\frac{1}{6}$

【解】应用斯托克斯定理

由斯托克斯定理知$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_S (\nabla\times\vec{F})\cdot d\vec{S}$

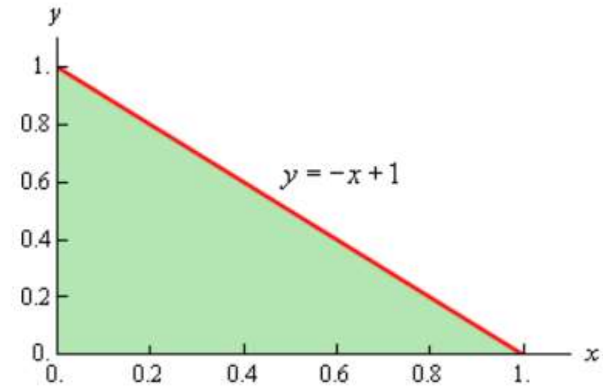
首先计算$\nabla\times\vec{F}$:

$$\nabla\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial x} \\ z^2 & y^2 & x \end{vmatrix} = (2z-1)\hat{y}$$



S是平面$f(x,y,z) = x+y+z-1=0$, 积分中其法向量指向y轴正方向，法向量为$\nabla f = \hat{x}+\hat{y}+\hat{z}$。

代入$d\vec{S}$表达式，其中D是S在xy平面的投影



$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_S \nabla\times\vec{F}\cdot d\vec{S}$$

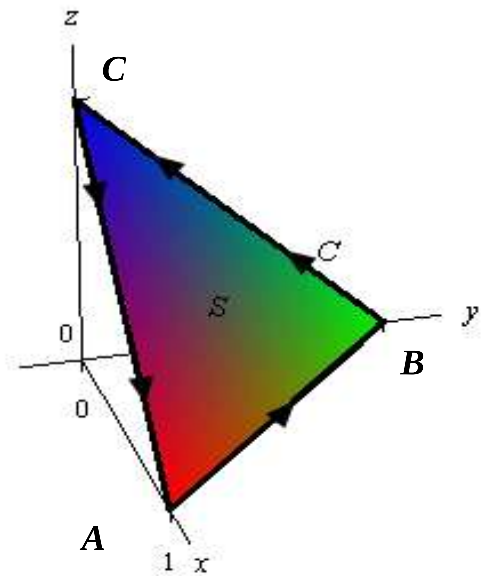
$$= \iint_S (2z-1)\hat{y}\cdot d\vec{S}$$

$$= \iint_D (2z-1)\hat{y}\cdot\frac{\nabla f}{||\nabla f||}||\nabla f||dA$$

$$= \iint_D (2z-1)\hat{y}\cdot(\hat{x}+\hat{y}+\hat{z})dA$$

$$= \int_0^1\int_0^{-x+1}(1-2x-2y)dy\,dx$$

$$= -\frac{1}{6}$$



思考：更直接的，也可以认为积分曲线是$\Delta OAB,\Delta OAC,\Delta OBC$围成曲面的边界，对这一曲面利用斯托克斯公式求解。

§0.4 泰勒展开

泰勒级数展开, 指用无穷项幂函数连加式（幂级数）来表示一个函数，这些相加项的系数由函数在某一点的导数求得，即

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \\
&= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \cdots
\end{aligned}
$$

【例】对$f(x)=e^x$在$x=0$处进行泰勒展开

【解】这是最简单的泰勒级数展开，由于

$$f^{(n)}(x)=e^x$$

则有$f^{(n)}(0)=1$，故

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

泰勒级数收敛性:

可以定义关于$f(x)$的n阶泰勒多项式:

$$T_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x)}{i!}(x - x_0)^i$$

则余项为$R_n = f(x) - T_n$

若在$|x - x_0| \leq R$, 有$\lim_{n\to\infty} R_n = 0$,则可说明

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

在$|x - x_0| \leq R$内收敛于$f(x)$.

常见函数的泰勒级数展开

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots (|x| < 1)$$

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \ldots - \frac{x^n}{n} + \cdots (|x| < 1)$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$$

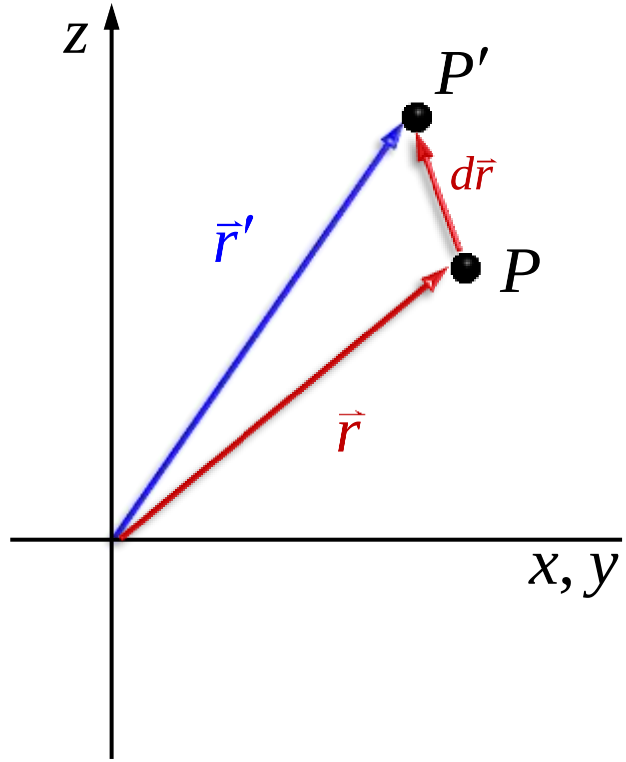
【例】如图所示，P附近的P'有

$$\vec{r}' = \vec{r} + d\vec{r}$$

其到原点的距离

$$r' = r + dr$$

【注意】$|d\vec{r}| \neq dr$



【解1】

对r'^2,有

$$r'^2 = r^2 + 2rdr + (dr)^2$$

忽略二阶小量，考虑到$rdr = \vec{r} \cdot d\vec{r}$,有

$$r'^2 = r^2 + 2\vec{r} \cdot d\vec{r}$$

【解2】考虑泰勒展开

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

此时$x_0 = r, x = r', x - x_0 = dx$

对$f(x) = x^2, f'(x) = 2x$，故有

$$r'^2 = r^2 + 2rdr = r^2 + 2\vec{r} \cdot d\vec{r}$$

类似的，有

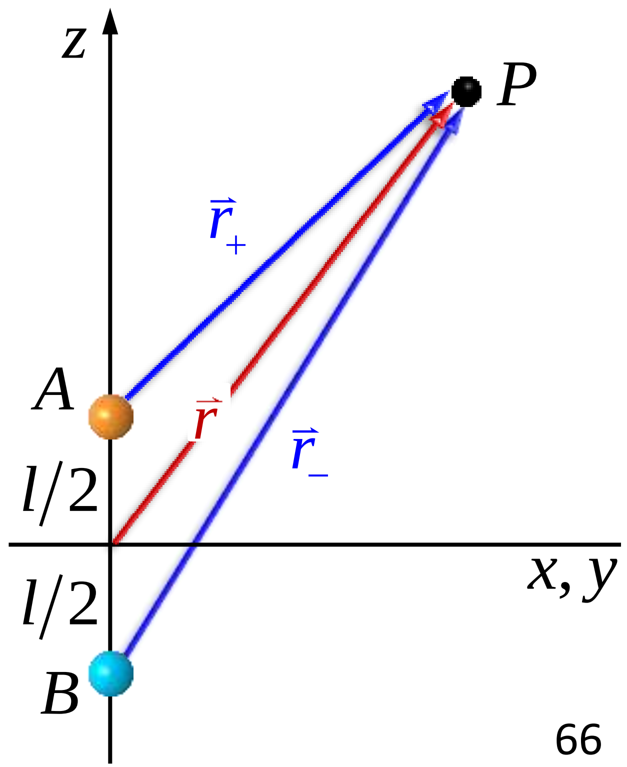
$$r'^3 = r^3 + 3r^2dr$$
$$= r^3 + 3r\vec{r} \cdot d\vec{r}$$
$$r'^{-3} = r^{-3} - 3r^{-4}dr$$
$$= r^{-3} - 3r^{-5}\vec{r} \cdot d\vec{r}$$

【例】A,B是空间中距离为l的点，两点之间的矢量用$\vec{l}$表示，$\vec{r}_+,\vec{r}_-$分别是空间中任一点P到这两点的矢量, P到这两点连线中点的矢量为$\vec{r}$,

(1) 证明:$r_-^2 - r_+^2 = 2\vec{l}\cdot\vec{r}$

(2) 计算$\vec{F} = \dfrac{\vec{r}_+}{r_+^3} - \dfrac{\vec{r}_-}{r_-^3}$关于$l$的最低阶泰勒展开

【解】如图所示



$$\begin{cases} \vec{r}_+ = \vec{r} - \vec{l}/2 \\ \vec{r}_- = \vec{r} + \vec{l}/2 \end{cases}$$

故有 $r_+^2 = r^2 - \vec{r}\cdot\vec{l} + \dfrac{l^2}{4}$

$r_-^2 = r^2 + \vec{r}\cdot\vec{l} + \dfrac{l^2}{4}$

因此$r_-^2 - r_+^2 = 2\vec{l}\cdot\vec{r}$

另外，如果我们认为l是小量,A点到P点的距离$\vec{r}_+$可以认为是原点O到P点距离$\vec{r}_-$经过小段位移的结果，即有

$\vec{r}_+ = \vec{r} + d\vec{r}$,其中$d\vec{r} = -\frac{\vec{l}}{2}$,

因此有$r_+^2 \approx r^2 + 2\vec{r}\cdot d\vec{r} = r^2 - \vec{r}\cdot\vec{l}$

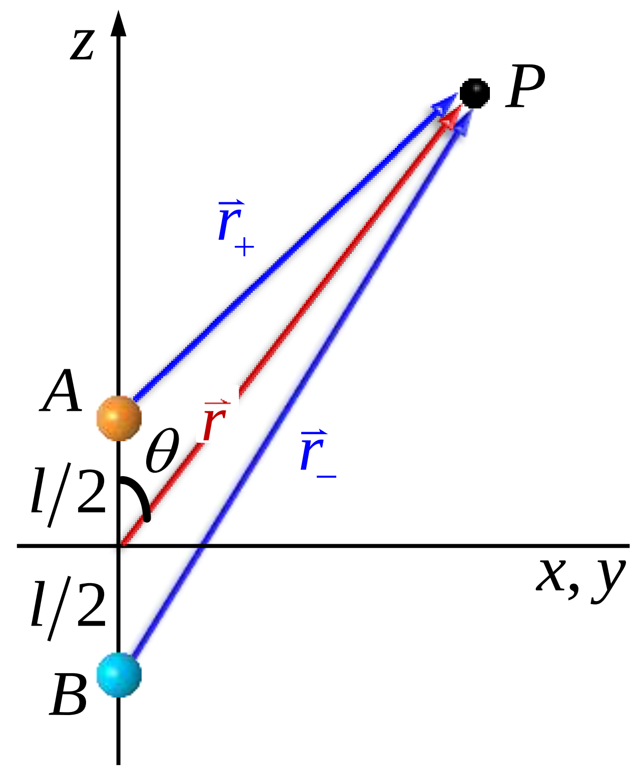
同样的，

$\vec{r}_- = \vec{r} + d\vec{r}$,其中$d\vec{r} = \frac{\vec{l}}{2}$,

有$r_+^2 \approx r^2 + 2\vec{r}\cdot d\vec{r} = r^2 + \vec{r}\cdot\vec{l}$

因此$r_-^2 - r_+^2 = 2\vec{l}\cdot\vec{r}$

我们也可以认为



$$\vec{r}_- = \vec{r}_+ + d\vec{r}$$

此时$d\vec{r} = \vec{l}$,因此

$$\mathrm{r}_-^2 - \mathrm{r}_+^2 = 2\vec{l}\cdot\vec{r}_-$$

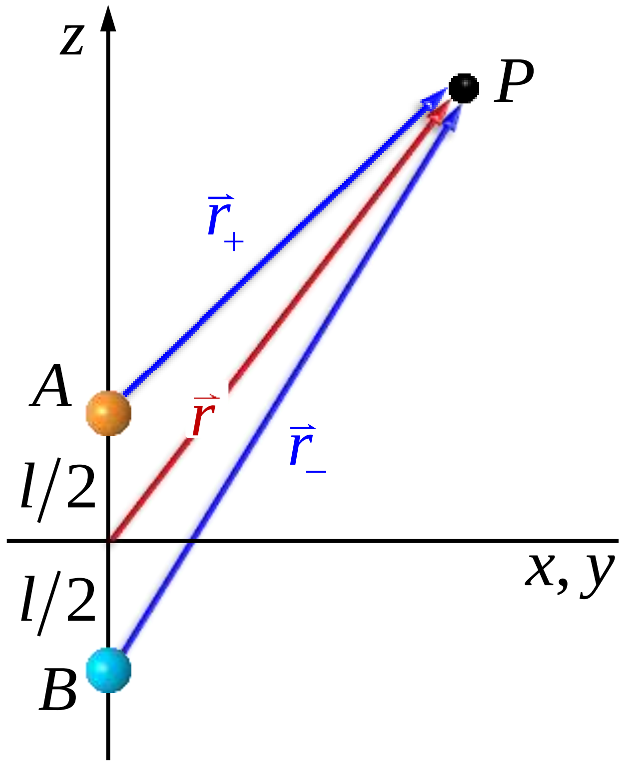
由于此时已经包含l的一阶项，无须再对$\vec{r}_-$展开，可以认为$\vec{r}_- \approx \vec{r}$,

有$\mathrm{r}_-^2 - \mathrm{r}_+^2 = 2\vec{l}\cdot\vec{r}_-$

$$\vec{F}=\frac{\vec{r}_+}{r_+^3}-\frac{\vec{r}_-}{r_-^3}$$
$$=\left(\frac{1}{r_+^3}-\frac{1}{r_-^3}\right)\vec{r}-\left(\frac{1}{r_+^3}+\frac{1}{r_-^3}\right)\frac{\vec{l}}{2}$$

同样的，可以认为$\vec{r}_+=\vec{r}+d\vec{r}$,其中$d\vec{r}=-\frac{\vec{l}}{2}$

$$\frac{1}{r_+^3}=\frac{1}{r^3}-3\frac{\vec{r}\cdot d\vec{r}}{r^5}$$
$$=\frac{1}{r^3}-3\frac{\vec{r}\cdot\left(-\frac{\vec{l}}{2}\right)}{r^5}=\frac{1}{r^3}+\frac{3}{2}\frac{\vec{r}\cdot\vec{l}}{r^5}$$



同理有：$\frac{1}{r_-^3}=\frac{1}{r^3}+\frac{3}{2}\frac{\vec{r}\cdot\vec{l}}{r^5}$

对$\vec{F}$中第二项，由于其已经包含l的最低非零阶项，因此可以认为$r_+\approx r_-\approx r$

故$\vec{F}\approx\frac{3\vec{l}\cdot\hat{r}}{r^4}\vec{r}-\frac{1}{r^3}\vec{l}$

$$\approx\frac{3\vec{l}\cdot\hat{r}}{r^3}\hat{r}-\frac{\vec{l}}{r^3}$$

另外，我们也可以认为$\vec{r}_- = \vec{r}_+ + d\vec{r}$，$d\vec{r} = \vec{l}$
相应的有

$$\left(\frac{1}{r_+^3} - \frac{1}{r_-^3}\right) = -3\frac{\vec{r}_+ \cdot d\vec{r}}{r^5} = -3\frac{\vec{r}_+ \cdot \vec{l}}{r^5}$$

考虑到要求对l的最低阶展开，
因此可以近似认为

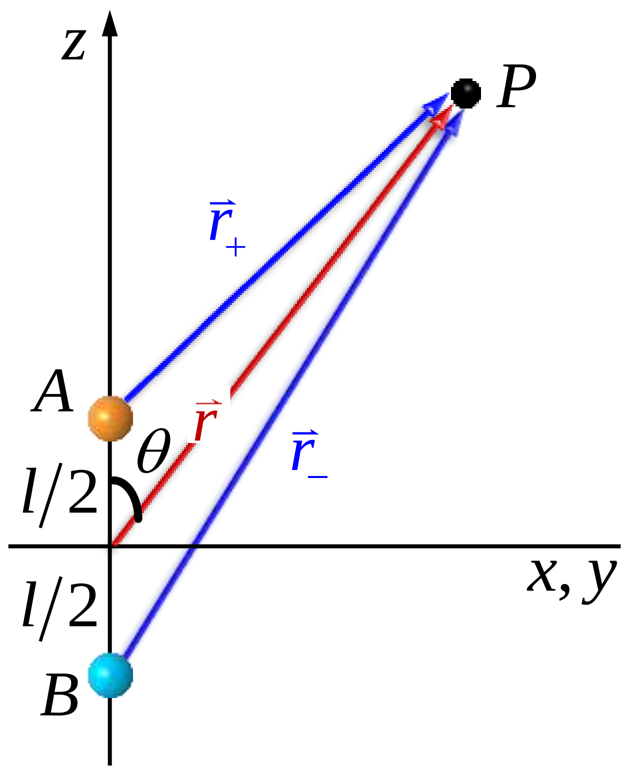
$$\vec{r}_+ \approx \vec{r}$$

故$\left(\frac{1}{r_+^3} - \frac{1}{r_-^3}\right) = -3\frac{\vec{r} \cdot \vec{l}}{r^5}$

因此

$$\vec{F} \approx \frac{3\vec{l} \cdot \hat{r}}{r^4}\vec{r} - \frac{1}{r^3}\vec{l}$$

$$\approx \frac{3\vec{l} \cdot \hat{r}}{r^3}\hat{r} - \frac{\vec{l}}{r^3}$$

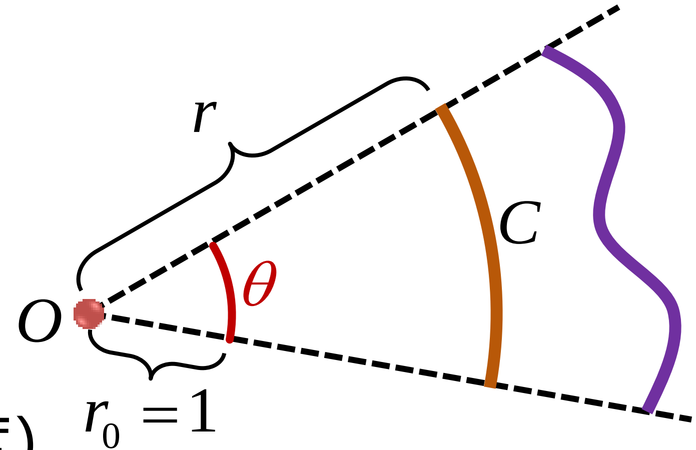


§0.5 平面角与立体角

一、平面角

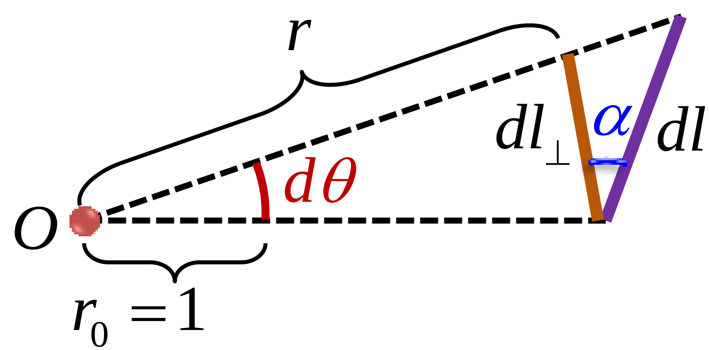
曲线相对于 O 点所张平面角，数值上等于相应的单位半径圆弧的长度

$$\theta \triangleq \frac{s}{r} = \frac{s_0}{r_0}$$



- **平面角元** （dl 相对于 O 点所张角度）

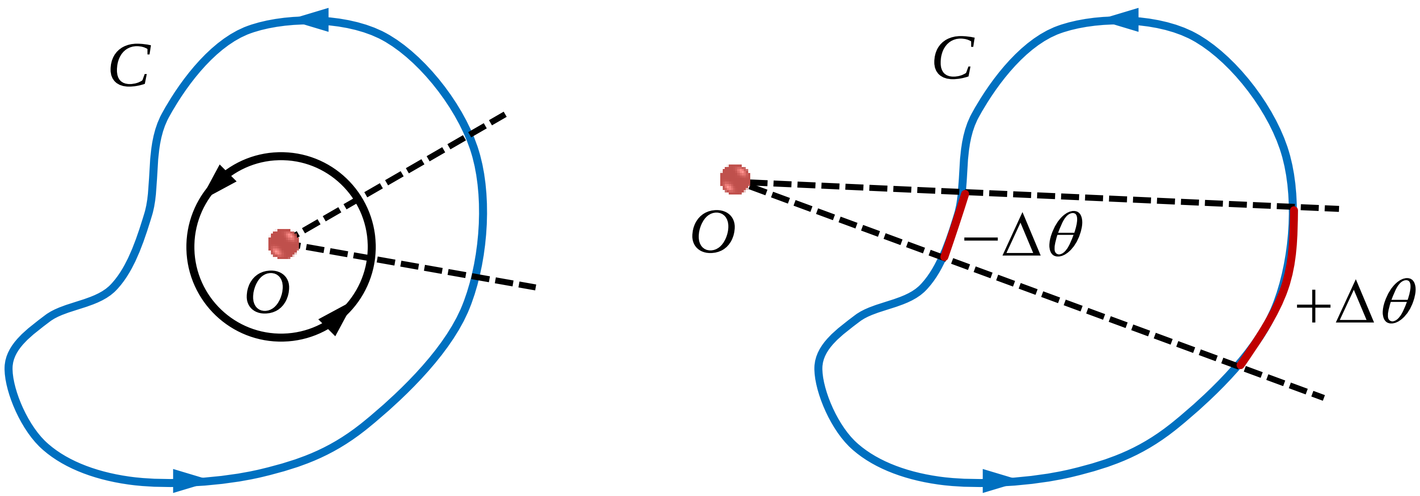
$$d\theta = \frac{dl_\perp}{r} = \frac{dl\cos\alpha}{r}$$



- 任一曲线 C 相对于 O 点所张角度

$$\theta = \int \frac{dl_\perp}{r} = \int \frac{dl\cos\alpha}{r}$$

若约定绕着 O 点逆时针转动为正



（1）闭曲线相对于内部一点所张平面角为 $\pm 2\pi$

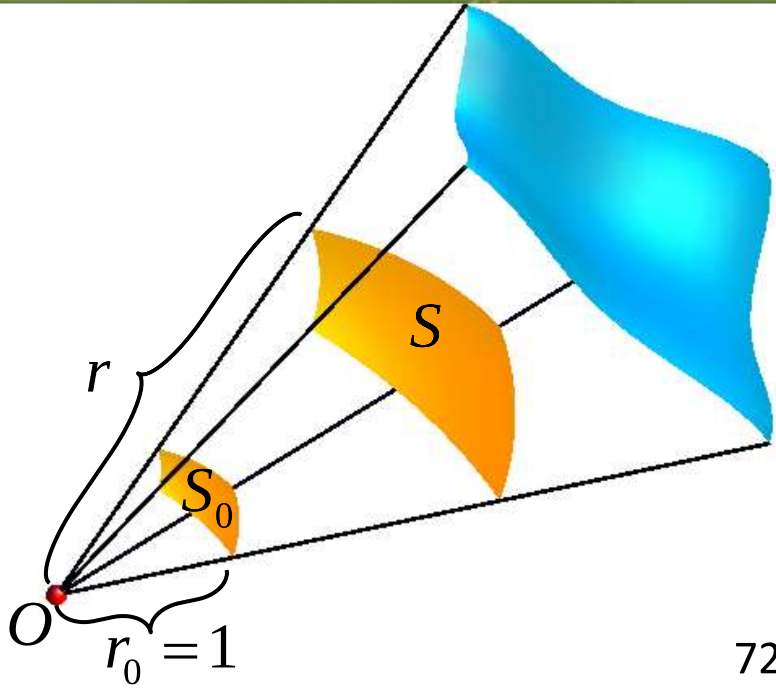
闭曲线相对于外部一点所张平面角为 0

（2）无限长直线相对于直线外一点所张平面角为 $\pm\pi$

二、立体角

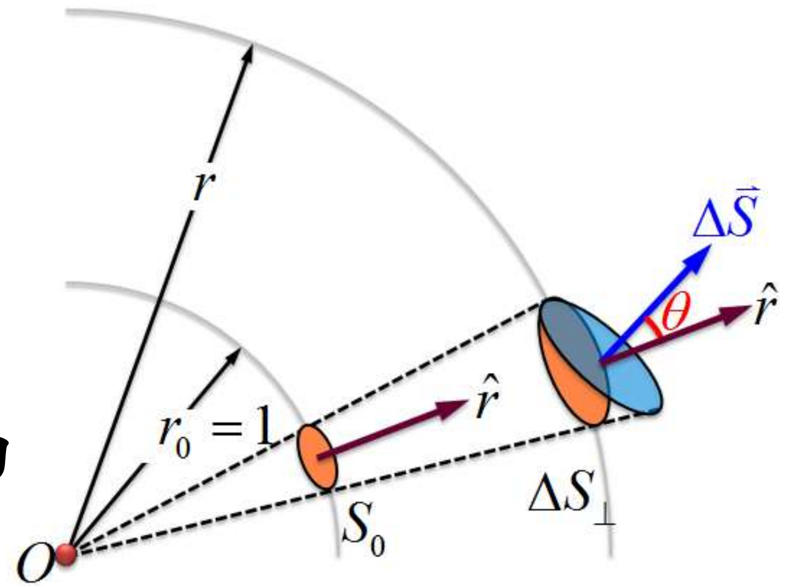
曲面相对于 O 点所张立体角，数值上等于相应的单位半径球面的面积

$$\Omega \triangleq \frac{S}{r^2} = \frac{S_0}{r_0^2}$$



- **立体角元**

$$d\Omega = \frac{dS\cos\theta}{r^2} = \frac{\hat{r}\cdot d\vec{S}}{r^2}$$



➢ 对于同一面元 dS，选取的法向不同，所得立体角相差一符号

- **任一曲面相对于 O 点所张立体角**

$$\Omega = \iint_S d\Omega = \iint_S \frac{dS\cos\theta}{r^2} = \iint_S \frac{\hat{r}\cdot d\vec{S}}{r^2}$$

➢ 开曲面面元的法向选取可相差一符号

➢ 闭曲面总是以外法向作为面元正向

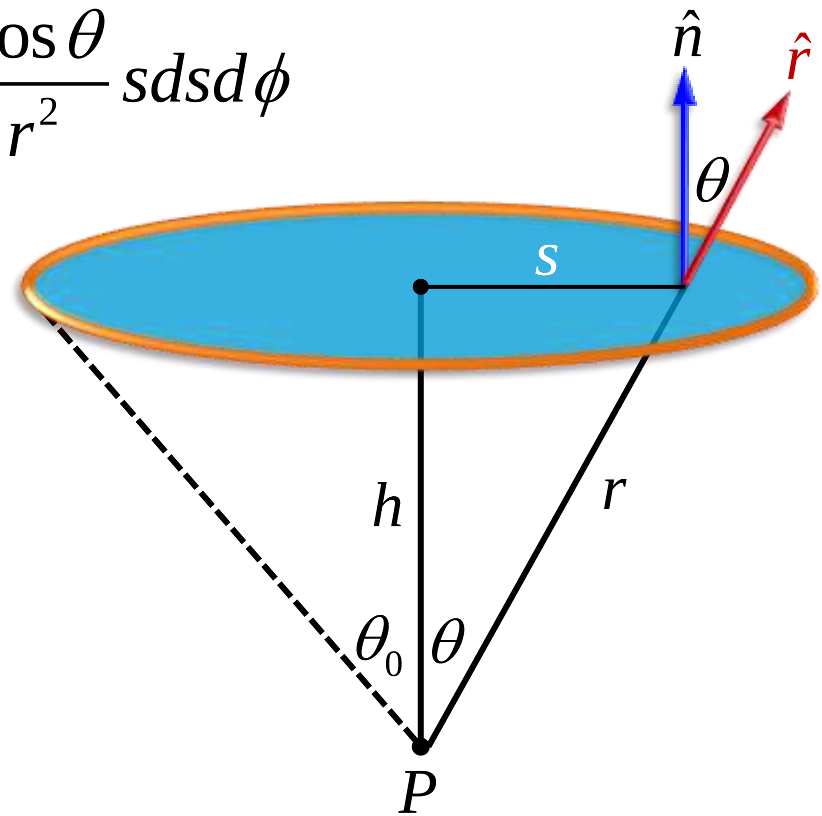
【例】试计算半径为 a 的圆盘相对于轴线上一点 P 所张的立体角，圆盘的法向取为向上的方向。已知 P 与圆盘距离为 h。

【解】

$$\Omega=\iint_S \frac{dS\cos\theta}{r^2}=\iint_S \frac{\cos\theta}{r^2}sdsd\phi$$

$$=\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^a \frac{hsds}{\left(s^2+h^2\right)^{3/2}}$$

$$=2\pi\left[-\frac{h}{\sqrt{s^2+h^2}}\right]_0^a$$

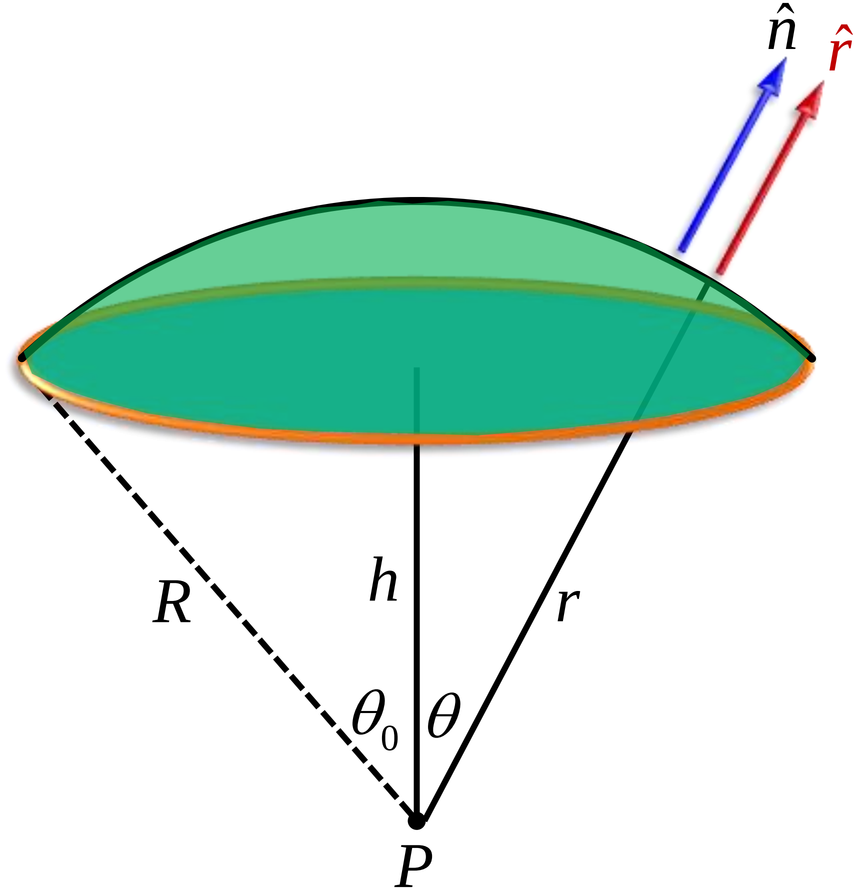


$$\Rightarrow \Omega=2\pi\left(1-\frac{h}{\sqrt{a^2+h^2}}\right)=2\pi\left(1-\cos\theta_0\right)$$

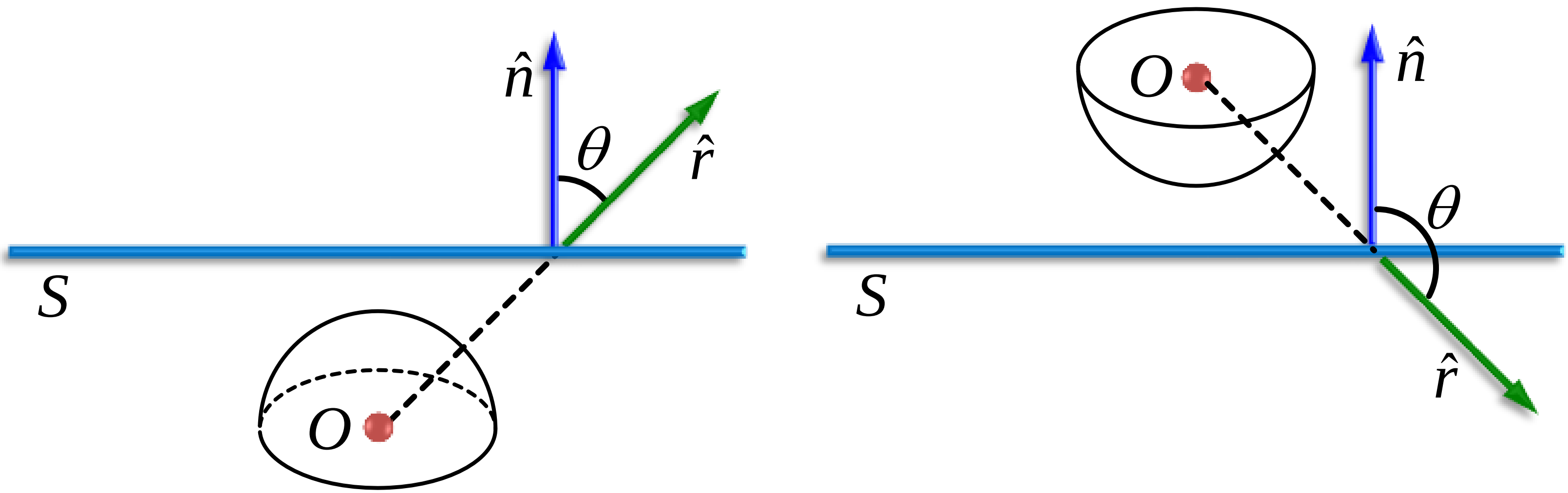
或者，由于圆盘与图示球冠相对于 P 点的立体角相同，因而

$$\Omega = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\theta_0} \sin\theta d\theta$$

$$\Rightarrow \quad \Omega = 2\pi\left(1-\cos\theta_0\right)$$



【例】 无限大平面 S 的法向取向上方向，试计算 S 相对于其上方和下方某点所张的立体角。



【解】

$$\Omega = \begin{cases} +2\pi, & O\text{ 在 } S\text{ 下方} \\ -2\pi, & O\text{ 在 } S\text{ 上方} \end{cases}$$

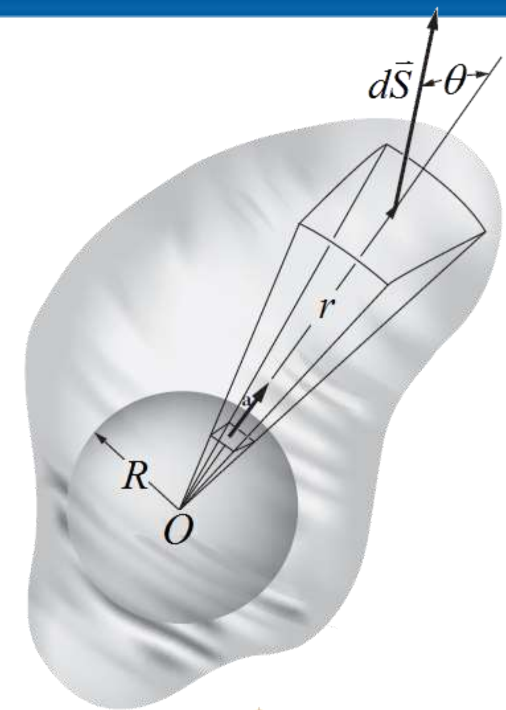
- 此结论也适用于：

  圆盘相对于盘面两侧无限靠近的两个点的立体角

  正所谓：一叶障目、不见泰山

三、闭曲面所张立体角

- 闭合曲面相对于点 O 点所张的立体角

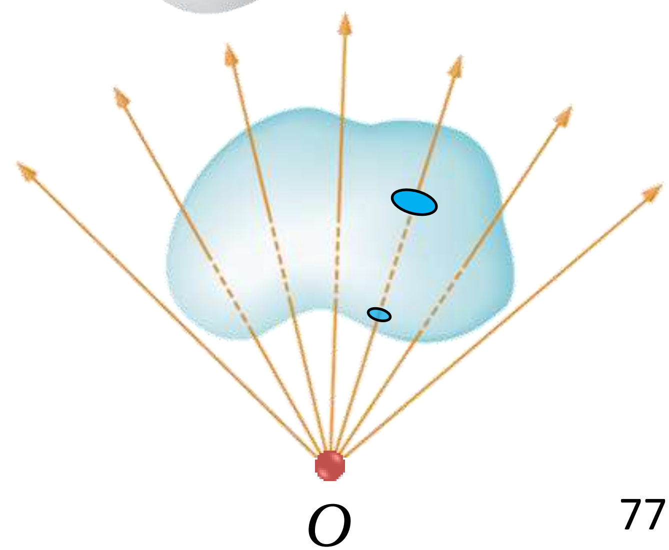


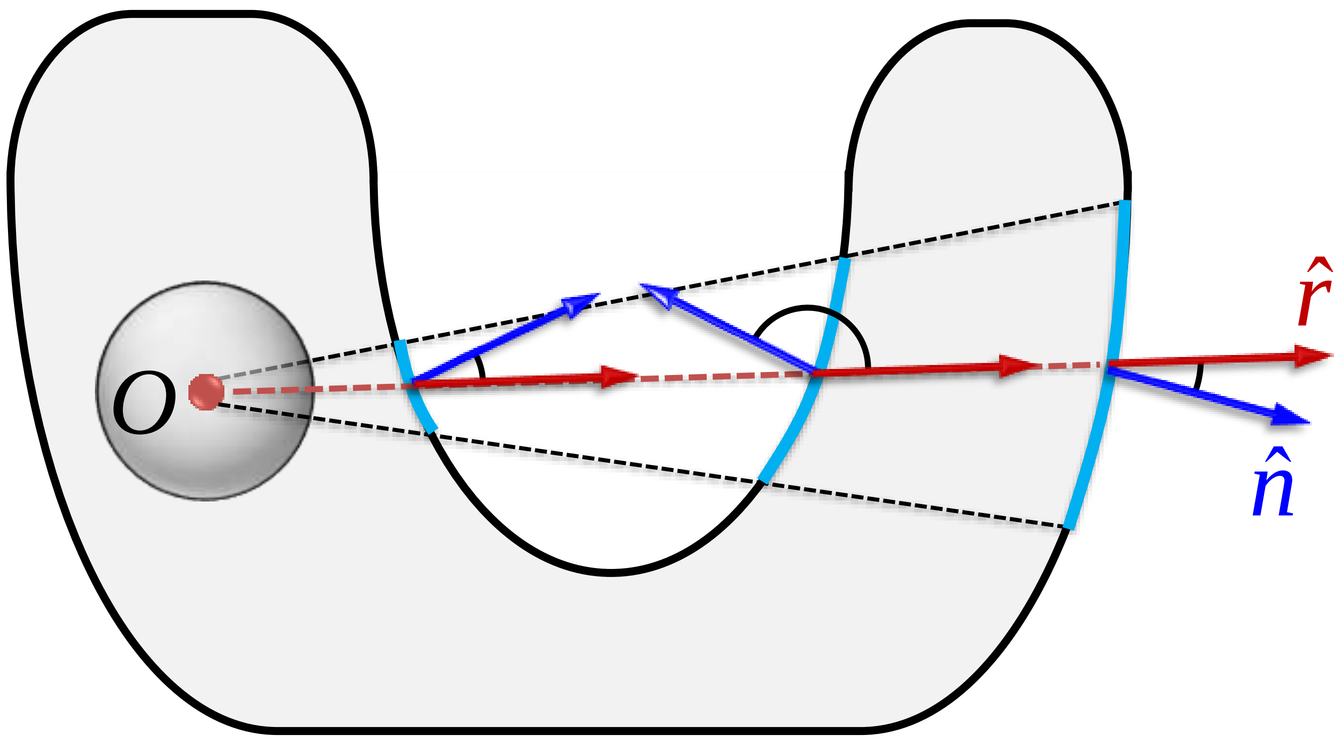
$$\Omega = \oint\!\!\!\oint_S \frac{\hat{r}}{r^2} \cdot d\vec{S}$$

> ➢ Ω 等于 $\vec{A} = \hat{r}/r^2$ 的通量

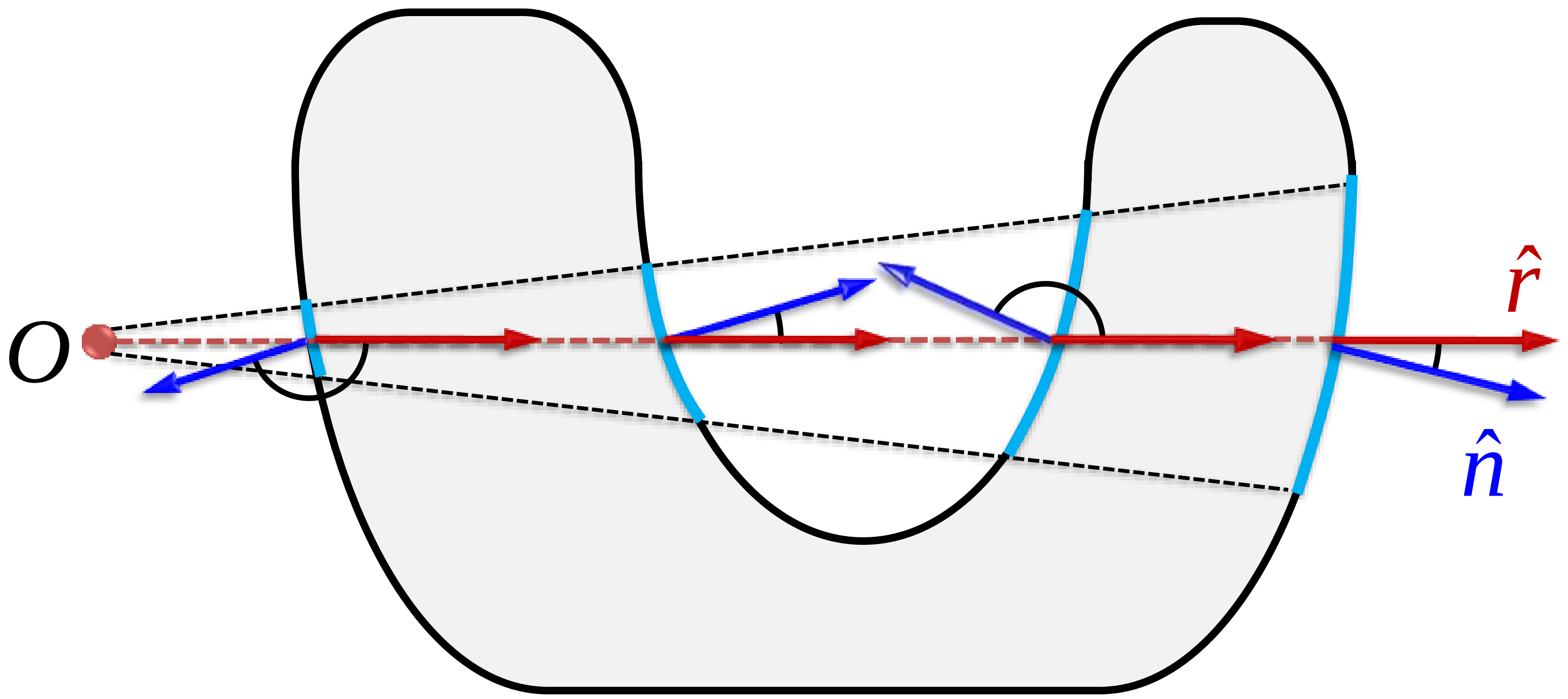
- 闭合曲面相对于点 O 的立体角

$$\Omega = \begin{cases} 4\pi, & O \text{ 在 } S \text{ 内} \\ 0, & O \text{ 在 } S \text{ 外} \end{cases}$$





O
$\hat{r}$
$\hat{n}$

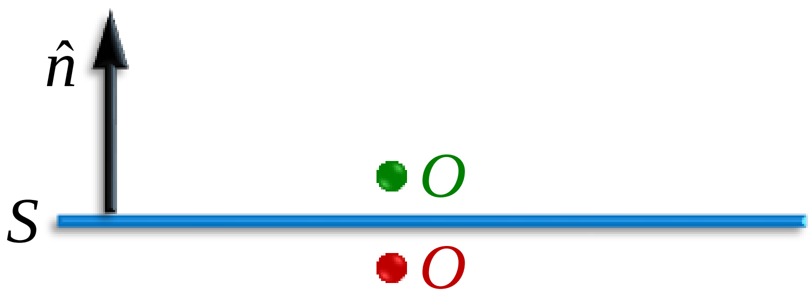

O
$\hat{r}$
$\hat{n}$

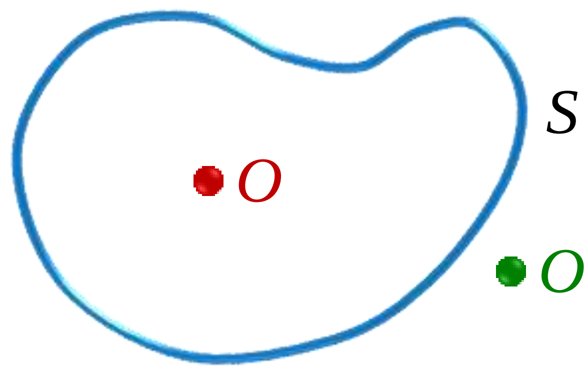
任一曲面相对于 O 点所张立体角

$$\Omega = \iint_S d\Omega = \iint_S \frac{dS\cos\theta}{r^2} = \iint_S \frac{\hat{r}\cdot d\vec{S}}{r^2}$$

数值上等于相应的单位半径球面的面积

闭曲面总是以外法向作为面元正向





$$\Omega = \begin{cases} +2\pi, & O\text{ 在 }S\text{ 下方} \\ -2\pi, & O\text{ 在 }S\text{ 上方} \end{cases}$$

$$\Omega = \begin{cases} 4\pi, & O\text{ 在 }S\text{ 内} \\ 0, & O\text{ 在 }S\text{ 外} \end{cases}$$


Thank You !