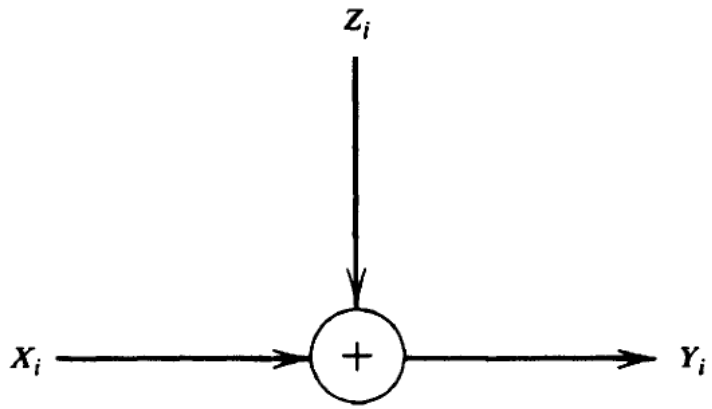
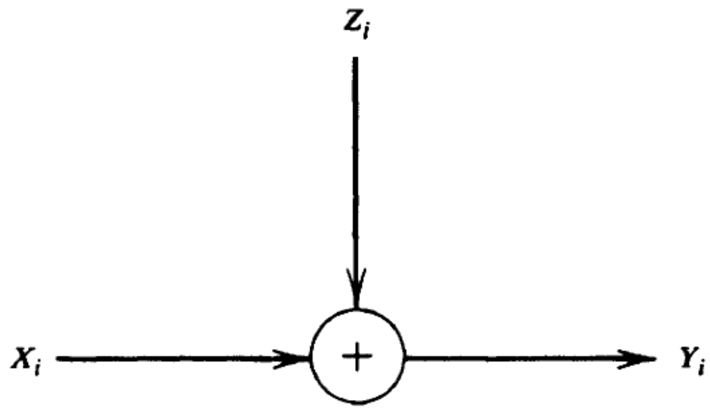
第9章 高斯信道



- 高斯信道：$Y_i = X_i + Z_i, \quad Z_i \sim \mathcal{N}(0, N)$
  - ✓ 离散时间信道
  - ✓ 噪声和信号相互独立

第9章 高斯信道



- 高斯信道：$Y_i = X_i + Z_i, \quad Z_i \sim \mathcal{N}(0, N)$
  - 若噪声方差为0或对输入信号没有限制，信道容量为无穷。

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \le P$$

高斯信道的例子

$$Y_i = X_i + Z_i, \quad Z_i \sim \mathcal{N}(0, N)$$

- 例 每次使用信道传输1比特的信息，
  - ✓ 发送方： $+\sqrt{P} \quad -\sqrt{P}$
  - ✓ 接收方： $Y > 0 \rightarrow +\sqrt{P}$
  - ✓ 误差概率： $P_e = 1 - \Phi(\sqrt{P/N})$

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-t^2}{2}} dt$$

  - ✓ 转化成离散二元对称信道
  - ✓ 离散信道的特点：可纠错，但有量化损失

高斯信道的信道容量

- 定义 功率限制为P的高斯信道的信道容量定义为：

$$C = \max_{f(x):EX^2 \le P} I(X;Y)$$

- 高斯信道的信道容量为：

$$C = \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{P}{N}\right)$$

最大值在 $X \sim \mathcal{N}(0,P)$ 时达到。

高斯信道的(M,n)码

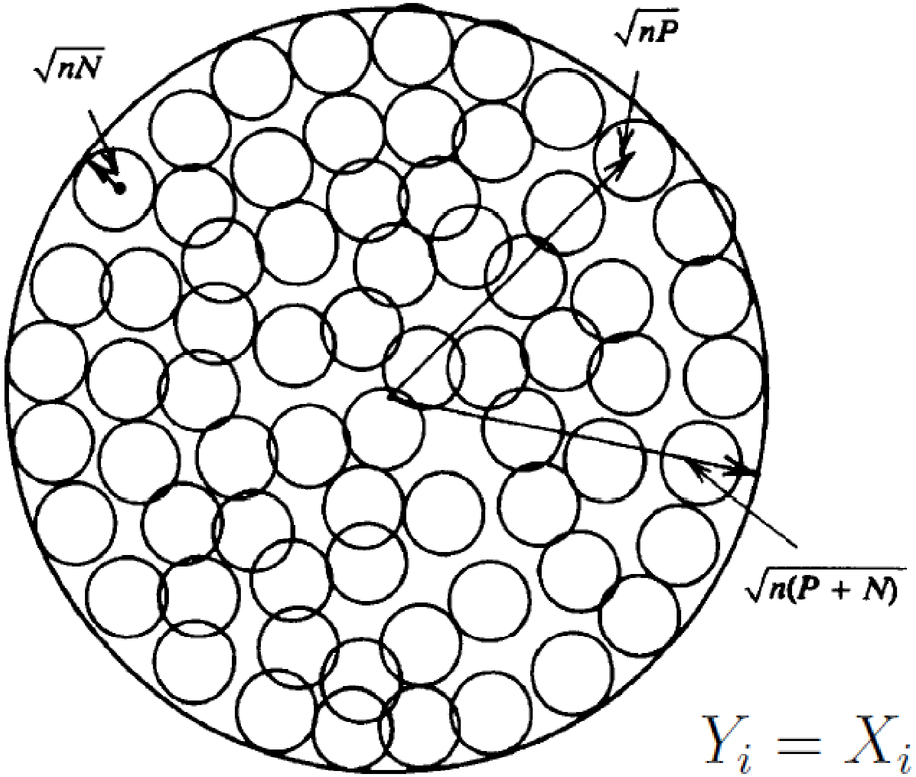
- 功率限制为P的高斯信道的(*M*,*n*)码：
  1. 下标集 $\{1,2,\cdots,M\}$
  2. 编码函数 $X^n:\{1,2,\cdots,M\}\to\mathcal{X}^n$ 生成码字 $x^n(1),x^n(2),\cdots,x^n(M)$，且满足功率限制P，
  $$\sum_{i=1}^{n} x_i^2(w)\le nP,\quad w=1,2,\cdots,M$$
  3. 译码函数 $g:\mathcal{Y}^n\to\{1,2,\cdots,M\}$
  4. 平均误差概率： $P_e^{(n)}=\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}\lambda_i$

高斯信道的信道编码定理

- **定义** 对于一个功率限制为P的高斯信道，如果存在满足功率限制的一个 $(2^{nR}, n)$ 码序列，使得最大误差 $\lambda^{(n)} \to 0$ ，则称码率R关于该功率限制为P的高斯信道是**可达的**。
- 高斯信道的信道容量即是所有可达码率的上确界。

$$R \to C = \frac{1}{2}\log\left(1+\frac{P}{N}\right)$$

高斯信道信道编码定理的证明



$$Y_i = X_i + Z_i, \quad Z_i \sim \mathcal{N}(0, N)$$

高斯信道信道编码定理的证明

1. 码簿的生成：令 $X_i(w)$ 为i.i.d. ~ $\mathcal{N}(0, P-\epsilon)$ ，形成码字 $X^n(1), X^n(2), \cdots X^n(2^{nR}) \in \mathcal{R}^n$
2. 编码：码簿生成之后，将其告知发送者和接收者。对消息下标w，发送器发送 $X^n(w)$
3. 译码：联合典型译码
   - ✓ $(X(\hat{W}), Y^n)$是联合典型的
   - ✓ 不存在其他的下标 $W' \neq \hat{W}$ 满足 $(X^n(W'), Y^n) \in A_\epsilon^{(n)}$
4. 误差概率：不失一般性，假设码字1被发送

高斯信道信道编码定理的逆定理

- **定理** 对于功率限制为P的高斯信道中的一个 $(2^{nR}, n)$ 序列，当 $P_e^{(n)} \to 0$ 时，则

$$R \leq C = \frac{1}{2}\log\left(1 + \frac{P}{N}\right)$$

- $W \to X^n(W) \to Y^n \to \hat{W}$

带宽有限信道

- 带白噪声的带宽有限信道
  - 时间连续信道

$$Y(t) = (X(t) + Z(t)) * h(t)$$

- 采样定理：最大频率为W的信号可由间隔为1/2W秒的采样序列完全决定。
- 考虑信号：绝大部分能量集中在带宽W内，且在一个有限时间区间T内。
- 该信号可以视作一个2TW维的向量。

带宽有限信道的信道容量

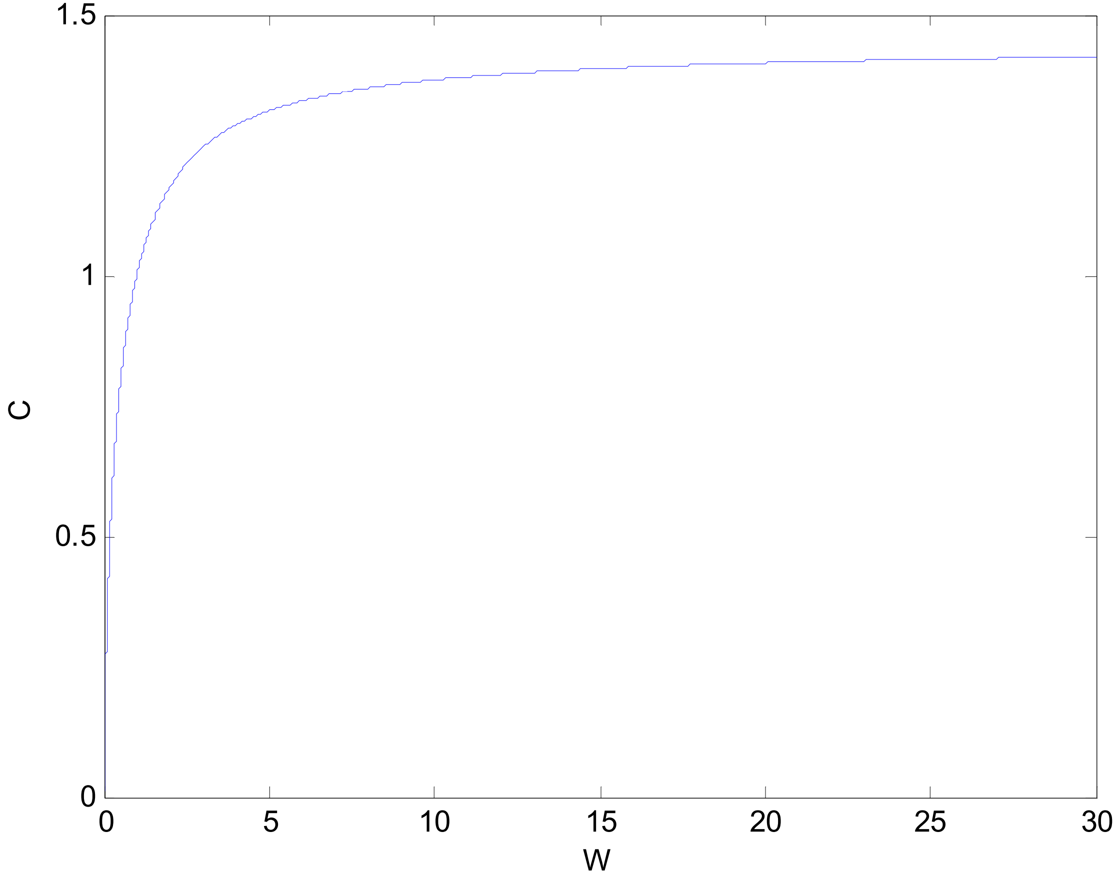
- 高斯白噪声：功率谱密度$N_0/2$瓦特/赫兹，带宽W赫兹。
  - 2TW个采样，每个样本方差$N_0/2$
- 信号：功率P
  - 2TW个采样，每个样本功率P/2W
- 信道容量：

$$C = W\log\left(1+\frac{P}{N_0 W}\right) \text{ 比特/秒}$$

- 无限带宽信道的信道容量： $C = \frac{P}{N_0}\log_2 e$ 比特/秒

信道容量和带宽的关系

$$C = W\log\left(1+\frac{P}{N_0W}\right)\ \text{比特/秒}$$



带宽有限信道的信道容量

- 香农公式的物理意义为：当信道容量一定时，增大信道的带宽，可以降低对信噪功率比的要求；反之，当信道频带较窄时，可以通过提高信噪功率比来补偿。香农公式是在噪声信道中进行可靠通信的信息传输率的上限值。

$$C = W \log\left(1 + \frac{P}{N_0 W}\right) \text{ 比特/秒}$$

带宽有限信道的例子

- 例 电话线传输
  - ✓ 带宽：3300赫兹
  - ✓ 信噪比（P/N_0W）：33dB
  - ✓ 信道容量：36000 比特/秒
  - ✓ 实际传输率： 33600 比特/秒
  - ✓ 发展：1967 4.8k bps, 1971 9.6k bps, 1980 14.4k bps, 1985 19.2k bps

并联高斯信道

- 独立的并联信道：

$$Y_j = X_j + Z_j,\ j = 1, 2\cdots, k$$

$$Z_j \sim \mathcal{N}(0, N_j)$$

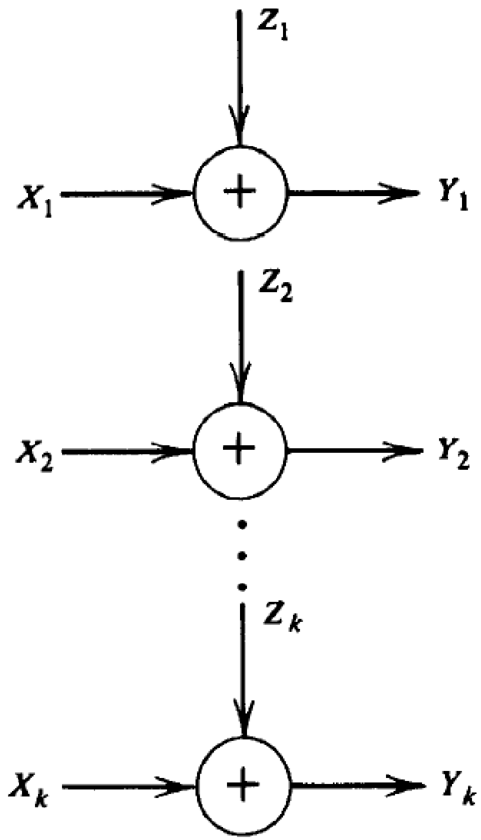
- 总功率的限制：

$$E\sum_{j=1}^{k} X_j^2 \le P$$

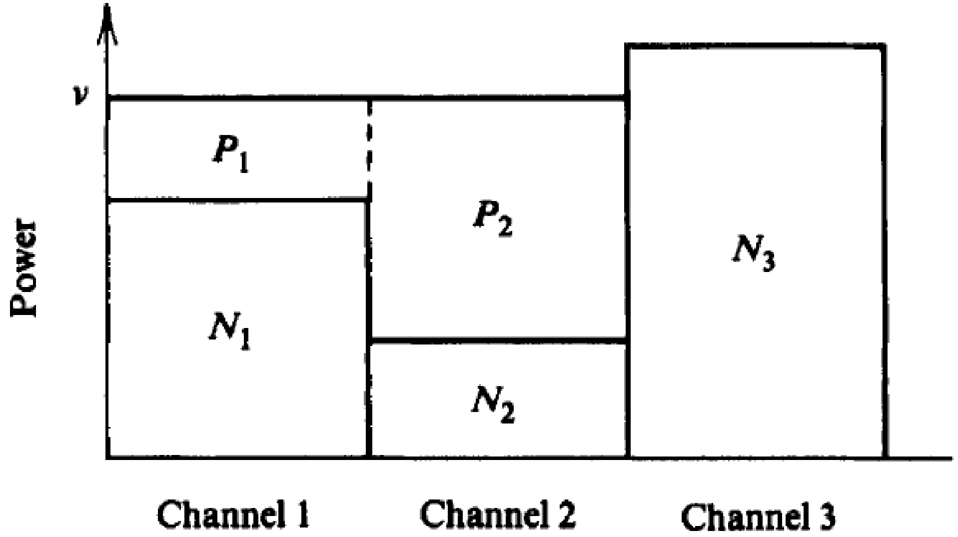
- 总信道容量：

$$C = \max I(X_1, X_2, \cdots, X_k; Y_1, Y_2, \cdots, Y_k)$$

- 目标：功率分配使总容量最大



注水法（Water Filling）



$$P_i = (v - N_i)^+$$

$$\sum (v - N_i)^+ = P$$

高斯彩色噪声信道

- 噪声互相相关：
  - 相关并联信道
  - 有记忆高斯噪声信道
- 功率限制：

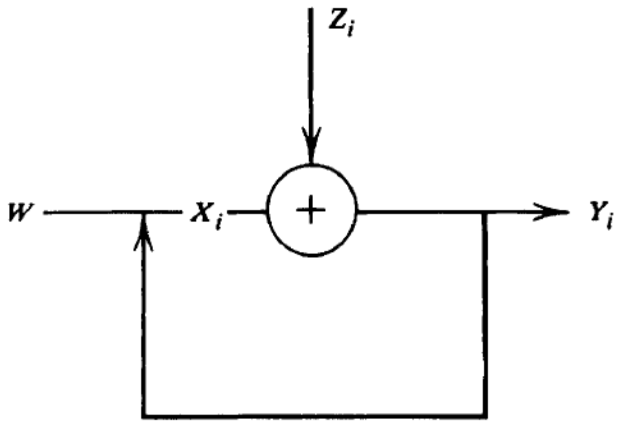
$$\frac{1}{n}\sum_i EX_i^2 \le P$$

$$\frac{1}{n}\mathrm{tr}(K_X) \le P$$

高斯彩色噪声信道的信道容量

- $C = \max I(X_1, X_2, \cdots, X_k; Y_1, Y_2, \cdots, Y_k)$
- $I(X^n; Y^n) = \frac{1}{2} \log \frac{|K_X + K_Z|}{|K_Z|}$
- 对角化 $K_Z = Q\Lambda Q^t$
- $A = Q^t K_X Q$
- 阿达玛（Hadamard）不等式：$|K| \leq \prod_{i=1}^{n} K_{ii}$
- 互信息最大化：$A_{ii} = (v - \lambda_i)^+$

带反馈的高斯信道



- 无记忆高斯信道：反馈不增加信道容量
- 有记忆高斯信道： $Y_i = X_i + Z_i,\ Z_i \sim \mathcal{N}(0, K_Z)$
- 编码：$X_i(W, Y^{i-1})$

带反馈高斯信道的信道容量

- 无反馈：

$$C_n = \max_{\frac{1}{n}\mathrm{tr}(K_X)\le P} \frac{1}{2n}\log\frac{|K_X+K_Z|}{|K_Z|}$$

- 有反馈：

$$C_{n,FB} = \max_{\frac{1}{n}\mathrm{tr}(K_X)\le P} \frac{1}{2n}\log\frac{|K_{X+Z}|}{|K_Z|}$$

- 定理 对于带反馈的高斯信道，使得 $P_e^{(n)} \to 0$ 的任意 $(2^{nR}, n)$ 码的码率满足

$$R_n \le C_{n,FB} + \epsilon_n$$

反馈对信道容量的影响

- $K_{X+Z} + K_{X-Z} = 2K_X + 2K_Z$
- 对于非负定矩阵A，B，若A-B是非负定的，则 $|A| \geq |B|$
- $|K_{X+Z}| \leq 2^n |K_X + K_Z|$
- 对于任意两个非负定矩阵A，B，以及 $0 \leq \lambda \leq 1$

$$|\lambda A + (1-\lambda)B| \geq |A|^{\lambda}|B|^{1-\lambda}$$

反馈对信道容量的影响

- 因果关系：$f(x^n, z^n) = f(z^n)\prod_{i=1}^{n} f(x_i|x^{i-1}, z^{i-1})$

- 若 X^n 和 Z^n 是因果关系，则

$$h(X^n - Z^n) \geq h(Z^n)$$

$$|K_{X-Z}| \geq |K_Z|$$

- 定理 $C_{n,FB} \leq C_n + \frac{1}{2}$ 比特/传输

- 定理 $C_{n,FB} \leq 2C_n$