

群聊: 数理逻辑和图论
2023 秋季学期课程群

《数理逻辑与图论》

网络空间安全学院
2023-2024 学年秋季学期

中国科学技术大学 刘斌
Email: flowice@ustc.edu.cn
办公室: 科技实验楼西楼**1711**室

助教: 邓杰, 丰逸飞, 张芷苒

课程主页:
https://faculty.ustc.edu.cn/flowice/zh_CN/zdylm/679091/list/index.htm



该二维码 7 天内 (9 月 11 日前) 有效, 重新进入将更新

自我介绍

- 江西南昌人
- **9400->SA9806->2001->2009**
- 爱好：篮球，集邮
- 研究方向：计算机视觉及多媒体信息处理；
人工智能+安全；智能可穿戴设备；

课程安排

➤ 授课时间：40学时

- ✓ 32学时上课，6学时习题课、复习和答疑，2学时考试

➤ 课后作业

- ✓ 每周二交给助教，一周后发回

➤ 评分标准

- ✓ 期末考试：60分
- ✓ 课后作业：32分，共8次作业，每次满分4分
 - ✓ 抄作业，该次作业按0分算
 - ✓ 迟交作业，该次作业满分按2分记
- ✓ 平时表现：8分

课程教材及预修课程

➤ 教科书

- ✓ 《离散数学及其应用（原书第8版）本科教学版》（美）
Kenneth H. Rosen 著，徐六通 杨娟 吴斌 译，机械工业出版社

➤ 参考书

- ✓ 《离散数学教程》耿素云 屈婉玲 王焊贫 著，北京大学出版社
- ✓ 《Discrete Mathematics and its Application (Eighth Edition)》Kenneth H. Rosen 著，机械工业出版社出版
- ✓ <http://www.mhhe.com/rosen>

➤ 预修课程

- ✓ 多变量微积分、线性代数、概率论与数理统计

课程内容

- 第1章：基础：逻辑和证明
- 第2章：基本结构：集合、函数、序列、求和与矩阵
- 第3章：计数（3.1-3.3）
- 第4章：高级计数技术（4.1, 4.5, 4.6）
- 第5章：关系
- 第6章：图
- 第7章：树（7.1-7.2）

离散数学的内容

离散数学

数理
逻辑

图论

数论

近世
代数

什么是离散数学

- 从某种意义上说，数学可分为连续数学（如数学分析、微分方程等以研究连续量为对象）和离散数学（如代数、图论等以研究离散量为对象）。
- 离散数学（**Discrete Mathematics**）
 - 离散数学是现代数学的一个重要分支，是计算机科学中基础理论的核心课程
 - 研究有限个或可数的离散量关系的一门科学。
 - 研究离散结构的数学分科。
 - 离散数学充分描述了计算机科学离散性的特征。
 - 离散数学是随着计算机科学的发展而逐步建立起来的一门新兴的工具性学科，形成于七十年代。

离散数学能解决什么问题

- 在计算机系统中，有多少种方式可以选择一个合法口令？
- 赢彩票的概率是多少？
- 两台计算机之间在网络上是否有通路？
- 在某一个交通系统下，两个城市之间的最短路径是什么？
- 怎样把整数序列按递增序排列？
- 完成上述排序需要多少步骤？
- 如何证明一个排序方法能正确地排序？
- 有多少合法的因特网网址？

为什么要学习离散数学

- 离散数学是计算机科学的数学基础，其基本概念、理论、方法大量地应用在数字电路、编译原理、数据结构、操作系统、数据库系统、算法设计、人工智能、计算机网络等专业课程中，是这些课程的基础课程。
- 教会学生如何进行思维：离散数学学习十分有益于概括抽象能力、逻辑思维能力、归纳构造能力的提高，能够培养提高学生的数学思维能力和对实际问题的求解能力。
- 学习方法
 - 强调：逻辑性、抽象性
 - 注重：概念、方法与应用

离散数学的内容

- **数学推理**: 阅读、理解和构造数学证明, 包括数理逻辑和证明方法等
- **组合分析**: 解决计数问题
- **离散结构**: 表示离散对象及其之间的关系抽象数学结构, 包括集合、关系、图、树等
- **算法思维**: 算法描述、正确性证明、计算时间分析
- **应用和建模**: 介绍在各领域的应用

离散数学的内容

离散数学

数理
逻辑

图论

数论

近世
代数

第一章 基础：逻辑和证明

- 1.1 命题逻辑
- 1.2 命题逻辑的应用
- 1.3 命题等价式
- 1.4 谓词和量词
- 1.5 嵌套量词
- 1.6 推理规则
- 1.7 证明导论
- 1.8 证明的方法和策略

1.1 命题逻辑 (Logic)

- **逻辑学**：是一门研究思维形式、规律和推理的科学。分为辩证逻辑和形式逻辑两种。思维的形式结构包括了概念、判断和推理之间的结构和联系，其中概念是思维的基本单位，通过概念对事物是否具有某种属性进行肯定或否定的回答，就是判断。由一个或几个判断推出另一判断的思维形式就是推理。
- **数理逻辑 (Mathematical Logic)**：用数学方法研究推理的规律称为数理逻辑。所谓数学方法就是引用一套符号体系的方法，所以数理逻辑又称作符号逻辑。
- 数理逻辑的核心是把逻辑推理符号化，即变成象数学演算一样的逻辑演算
- 计算机是数理逻辑和电子学相结合的产物

关于逻辑的故事

上帝真的是万能的吗？

让我们来提出一个问题：上帝是否能创造出一块连自己都举不起来的石头？

关于逻辑的故事

上帝真的是万能的吗？

让我们来提出一个问题：上帝是否能创造出一块连自己都举不起来的石头？

如果上帝创造出了一块连他自己都举不起来的石头，那么上帝就不是万能的，因为有一块石头他举不起来。

如果上帝不能创造出一块连他自己都举不起来的石头，那么上帝也不是万能的，因为有一块石头他创造不出来。

所以无论上帝是否能创造出这么一块石头，他都不是万能的。

关于逻辑的故事

据传，古希腊有一个叫欧提勒士的年轻人，向当时著名的智者普罗达哥拉斯学习法律。双方签了一个合同，结束学业之后，学生付给老师一半学费，另一半学费则要等到学生第一次出庭打赢官司，再支付。

可是学生一直没有打赢官司，剩下的一半学费老师迟迟没有拿到。老师终于等不及了，就向法庭起诉，要学生支付另一半学费。

关于逻辑的故事

据传，古希腊有一个叫欧提勒士的年轻人，向当时著名的智者普罗达哥拉斯学习法律。双方签了一个合同，结束学业之后，学生付给老师一半学费，另一半学费则要等到学生第一次出庭打赢官司，再支付。

可是学生一直没有打赢官司，剩下的一半学费老师迟迟没有拿到。老师终于等不及了，就向法庭起诉，要学生支付另一半学费。

老师说：“如果你打赢这场官司，依照合同，你得把另一半学费付给我；如果你打输这场官司，那么根据法庭判决，你也得把另一半学费付给我。所以，不管你这场官司是赢是输，你都要把学费给我。”

关于逻辑的故事

据传，古希腊有一个叫欧提勒士的年轻人，向当时著名的智者普罗达哥拉斯学习法律。双方签了一个合同，结束学业之后，学生付给老师一半学费，另一半学费则要等到学生第一次出庭打赢官司，再支付。

可是学生一直没有打赢官司，剩下的一半学费老师迟迟没有拿到。老师终于等不及了，就向法庭起诉，要学生支付另一半学费。

老师说：“如果你打赢这场官司，依照合同，你得把另一半学费付给我；如果你打输这场官司，那么根据法庭判决，你也得把另一半学费付给我。所以，不管你这场官司是赢是输，你都要把学费给我。”

学生反驳道：“如果我打输这场官司，依照合同，我不需要把另一半学费付给你；如果我打赢这场官司，那么根据法庭判决，我也不需要把另一半学费付给你。所以，不管我这场官司是赢是输，我都不需要把学费给你。”

关于逻辑的故事

➤ 理发师悖论（罗素悖论）

在某个城市中有一位理发师，他的广告词是这样写的：“本人的理发技艺十分高超，誉满全城。我将为本城所有不给自己刮脸的人刮脸，我也只给这些人刮脸。我对各位表示热诚欢迎！”来找他刮脸的人络绎不绝，自然都是那些不给自己刮脸的人。可是，有一天，这位理发师从镜子里看见自己的胡子长了，他本能地抓起了剃刀，你们看他能不能给他自己刮脸呢？

如果他不给自己刮脸，他就属于“不给自己刮脸的人”，他就要给自己刮脸，而如果他给自己刮脸呢？他又属于“给自己刮脸的人”，他就不该给自己刮脸。

罗素悖论

- 将集合分成两类,一类是集合 A 本身是 A 的一个元素,即 $A \in A$,另一类是集合 A 本身不是 A 的一个元素,即 $A \notin A$ 。
- 现构造一个集合 S :
- $S = \{A | A \notin A\}$ 也就是说 S 是由满足条件 $A \notin A$ 的那些 A 组成的一个新的集合。
- 我们要问: S 是不是它自己的一个元素? 即 $S \in S$,还是 $S \notin S$ 。
- 既不是 $S \in S$,也不是 $S \notin S$,这个悖论就是著名的罗素悖论。

关于逻辑的故事

逻辑推理俱乐部门口贴着一张布告：“欢迎你加入推理俱乐部！只要你通过推理取得一张申请表，就可以获得会员资格了！”

只见桌子上摆着两个盒子：一个圆盒子，一个方盒子。圆盒子上写着一句话：“申请表不在此盒中”。方盒子上写着一句话：“这两句话中只有一句是真话”。那么申请表在哪个盒子里呢？

关于逻辑的故事

逻辑推理俱乐部门口贴着一张布告：“欢迎你加入推理俱乐部！只要你通过推理取得一张申请表，就可以获得会员资格了！”

只见桌子上摆着两个盒子：一个圆盒子，一个方盒子。圆盒子上写着一句话：“申请表不在此盒中”。方盒子上写着一句话：“这两句话中只有一句是真话”。那么申请表在哪个盒子里呢？

- 设方盒子上写的话（“这两句话中只有一句是真话”）是真的，推出圆盒子上的话（“申请表不在此盒中”）是假的。推出申请表在圆盒子中。
- 设方盒子上的话（“这两句话中只有一句是真话”）是假的，推出圆盒子上的话也是假的。推出申请表在圆盒子中。
- 或者方盒子上的话是真的，或者方盒子上的话是假的。总之，申请表在圆盒子中。

逻辑学的简单历史

➤ 古典形式逻辑：亚里斯多德的直言三段论理论

例

所有大学生都是青年；

参加大运会的运动员是大学生；

所以，参加大运会的运动员是青年。

逻辑学的简单历史

- 古典形式逻辑：亚里斯多德的直言三段论理论
- 初始阶段（1660s — 19 世纪末）：将数学应用于逻辑
 - 莱布尼兹（Leibniz）：现代逻辑的首席创始人
 - 布尔（G. Boole）：奠基人，逻辑的数学分析
- 过度阶段（19 世纪末— 1940 前后）：逻辑应用于数学
 - 康托尔(G. Cantor)：建立了朴素集合论
 - 罗素(Bertrand Russell)：《数学原理》
- 成熟阶段（1930s — 1970s）：成为数学的独立分支
 - 成为计算机科学的理论基础

命题 (Proposition)

➤ **定义** **命题**: 是一个或真或假的陈述语句, 但不能既真又假。

例

例 1 下面的陈述句均为命题。

1. 华盛顿是美国的首都。
2. 多伦多是加拿大的首都。
3. $1+1=2$ 。
4. $2+2=3$ 。

命题 1 和 3 成真, 命题 2 和 4 为假。

命题 (Proposition)

➤ **定义** **命题**: 是一个或真或假的陈述语句, 但不能既真又假。

例

例 2 考虑下述语句:

1. 几点了?
2. 仔细读这个。
3. $x+1=2$ 。
4. $x+y=z$ 。

命题 (Proposition)

-  **定义** **命题**：是一个或真或假的陈述语句，但不能既真又假。
- **命题变元**：命题的字母表示， $p, q, r, s, \dots$
- 命题的 **真值** (true value)：真命题的真值用“T”表示，假命题的真值用“F”来表示
- **命题逻辑** (propositional logic) 或 **命题演算** (propositional calculus)：涉及命题的逻辑领域，2300年前由古希腊哲学家亚里士多德创建

命题的否定

➤ **定义** 命题的**否定** (**negation**): 令 p 为一命题, 则语句“不是 p 所说的情形”是另一个命题, 称为 p 的否定, 用“ $\neg p$ ”表示。命题“ $\neg p$ ”读为“非 p ”。

例

例 3 找出命题

“今天是星期五。”

的否定, 并用中文表示。

Extra Examples

解 否定为

“并非今天是星期五。”

也可以更简单地表达为

“今天不是星期五。”

真值表和运算符

- **真值表 (truth table)** 给出了命题真值之间的关系。

表 1-1 命题之否定的真值

p	$\neg p$
T	F
F	T

- **运算符 (operator)** 可以从已有命题构造新命题。有时可称为**联接词 (connective)**。
 - 非运算符: $\neg$
- **原子命题 (Atomic Proposition)** : 不含逻辑运算符的命题, 不可拆分
- **复合命题 (Compositional Proposition)** : 用逻辑运算符组合命题构造出的新命题

合取 (conjunction)

- **定义** 令 p 和 q 为命题。用 $p \wedge q$ 表示这样一个命题：当 p 和 q 均为真命题时它为真，否则为假。命题 $p \wedge q$ 称为 p 和 q 的**合取**。

表 1-2 两命题合取的真值表

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

合取 (conjunction)

-  **定义** 令 p 和 q 为命题。用 $p \wedge q$ 表示这样一个命题：当 p 和 q 均为真命题时它为真，否则为假。命题 $p \wedge q$ 称为 p 和 q 的**合取**。



p : 今天是星期五;
 q : 今天下雨;
 $p \wedge q$: 今天是星期五而且下雨。

- 日常用语里的“和”、“与”、“并且”一般表示同类事物的并列;而形式逻辑中的 $\wedge$ 只关心命题与命题之间的真值关系,并不考虑两命题是否有意义上的联系

析取 (disjunction)

- **定义** 令 p 和 q 为命题。用 $p \vee q$ 表示这样一个命题：当 p 和 q 均为假命题时它为假，否则为真。命题 $p \vee q$ 称为 p 和 q 的**析取**。

表 1-3 两命题析取的真值表

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

析取 (disjunction)

➤  **定义** 令 p 和 q 为命题。用 $p \vee q$ 表示这样一个命题：当 p 和 q 均为假命题时它为假，否则为真。命题 $p \vee q$ 称为 p 和 q 的**析取**，又称**兼或**。

 **例** “选修过微积分或者计算机科学的学生可选修本课”

p : 选修过微积分的学生;

q : 选修过计算机科学的学生;

$p \vee q$: 选修过微积分或者计算机科学的学生。



“选修过微积分或者计算机科学，但不是两者都学过的学生，可选修本课”

“汤或沙拉，加一道小菜”

异或 (exclusive or)

➤  **定义** 令p和q为命题。p和q的**异或**，用 $p \oplus q$ 表示，是这样命题：当p和q中恰有一个为真时它为真，否则为假。

 **例** “选修过微积分或者计算机科学，但不是两者都学过的学生，可选修本课”

“汤或沙拉，加一道小菜”

异或 (exclusive or)

- **定义** 令 p 和 q 为命题。 p 和 q 的**异或**，用 $p \oplus q$ 表示，是这样命题：当 p 和 q 中恰有一个为真时它为真，否则为假。

表 1-4 两命题异或的真值表

p	q	$p \oplus q$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

蕴含 (implication)

- **定义** 令 p 和 q 为命题。**蕴含** $p \rightarrow q$ 是这样命题：当 p 为真而 q 为假时它为假，否则为真。 p 称为假设（或前提，前项）， q 称为结论（或推论）。一个蕴含有时也称为条件语句 (*conditional statement*)

表 1-5 蕴含 $p \rightarrow q$ 的真值表

p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

表示蕴含的术语

- “如果 p , 那么 q ”
- “如果 p , 则 q ”
- “ p 仅当 q ”
- “ p 成立, 则 q 成立”
- “ q 的充分条件是 p ”
- “ q 由 p 推出”
- “ p 是 q 的充分条件”

- “ p 蕴含 q ”
- “ q 如果 p ”
- “ q 每当 p ”
- “ p 的必要条件是 q ”
- “ q 是 p 的必要条件”

➤ 注意：只有在 p 为真而 q 为假时， $p \rightarrow q$ 才为假。如果 p 为假，则不管 q 的真值是什么， $p \rightarrow q$ 都为真。

蕴含的例子

- 一个政治家说：“如果我当选了，那么我将会减税”；
- “如果今天天晴，那么我们将去海滩”；
- “如果今天是星期五，那么 $2+3=5$ ”；
- “如果今天是星期六，那么 $2+3=6$ ”；
- 计算机语言“if then”和蕴含的区别
“if $2+2=4$ then $x:=x+1$ ”

蕴含的逆、倒置和反

- 蕴含： $p \rightarrow q$
- 逆蕴含（converse implication）： $q \rightarrow p$
- 倒置蕴含（contrapositive implication）： $\neg q \rightarrow \neg p$
- 反蕴含（inverse implication）： $\neg p \rightarrow \neg q$

- 倒置蕴含和蕴含具有相同的真值
- 逆蕴含和反蕴含具有相同的真值，但与蕴含的真值不同

- **等价（equivalent）**：两个复合命题总是具有相同的真值时，我们称这两个命题等价

蕴含的例子

例

“每当下雨时，主队就能获胜”

蕴含：如果下雨，主队就能获胜；

倒置蕴含：如果主队没有获胜，那么没有下雨；

逆蕴含：如果主队获胜，那么下雨了；

反蕴含：如果没有下雨，那么主队没有获胜；

双蕴含 (bi-implication)

- **定义** 令 p 和 q 为命题。**双蕴含** $p \leftrightarrow q$ 是这样一个问题：当 p 和 q 具有相同真值时它为真，否则为假。一个双蕴含有时也称为**双条件语句** (*biconditional statement*)。

表 1-6 双蕴含 $p \leftrightarrow q$ 的真值表

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

双蕴含的含义

- 双蕴含 $p \leftrightarrow q$ 恰在 $p \rightarrow q$ 和 $q \rightarrow p$ 均为真时为真。我们常用术语“ p 当且仅当 q ”来表示这一双蕴含。
- $p \leftrightarrow q$ 与 $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ 有完全相同的真值。

例

p : 你可以坐飞机;

q : 你买机票了;

$p \leftrightarrow q$: 你可以坐飞机当且仅当你买机票了;

双蕴含的含义

- 双蕴含 $p \leftrightarrow q$ 恰在 $p \rightarrow q$ 和 $q \rightarrow p$ 均为真时为真。我们常用术语“ p 当且仅当 q ”来表示这一双蕴含。
- $p \leftrightarrow q$ 与 $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ 有完全相同的真值。
- “当且仅当”结构在自然语言中很少使用，我们一般用相对简单的结构来表示。比如说，“你吃完饭才可以吃甜点”。双蕴含的部分含义是隐含的，这就造成了在有些情况下，自然语言的不精确性。而在数学上，双蕴含和单蕴含是有明确区分的。
- 自然语言和逻辑的区别
 - 逻辑： $p \leftrightarrow q = q \leftrightarrow p$
 - 自然语言：不一定。如 p ：吃完饭； q ：可以吃甜点

逻辑运算符的优先级

表 1-7 逻辑运算符的优先级

运 算 符	优 先 级
$\neg$	1
$\wedge$	2
$\vee$	3
$\rightarrow$	4
$\leftrightarrow$	5

➤ 在容易混淆的情况下，尽量使用括号

逻辑运算和位运算

- 计算机用**字位**（bit）来表示信息，每个字位有两个可能的值：0或1；
- 用字位来表示真值
- 布尔变量（Boolean variable）
- **字位运算**（bit operation）：对应逻辑联接词

真值	位
T	1
F	0

表 1-8 字位运算符 OR、AND 和 XOR 的真值表

x	y	$x \vee y$	$x \wedge y$	$x \oplus y$
0	0	0	0	0
0	1	1	0	1
1	0	1	0	1
1	1	1	1	0

逻辑运算和位运算

- 计算机用**字位**（bit）来表示信息，每个字位有两个可能的值：0或1；
- 用字位来表示真值
- 布尔变量（Boolean variable）
- **字位运算**（bit operation）：对应逻辑联接词
- **位串**（bit string）：0个或多个字位的序列，位串的长度就是它所含字位的个数；
- 长度相同的两个位串的**按位**（bitwise）运算：运算结果的每个字位均由左运算的两个位串地对应字位经运算得到

真值	位
T	1
F	0

逻辑运算和位运算

例

01 1011 0110

11 0001 1101

11 1011 1111 按位 OR

01 0001 0100 按位 AND

10 1010 1011 按位 XOR

- 长度相同的两个位串的**按位**（bitwise）运算：运算结果的每个字位均由被运算的两个位串地对应字位经运算得到

命题逻辑的应用-翻译语言的句子

- 由于语言的二义性，需要把句子译成逻辑表达式以消除歧义
- 有时需要在句子含义基础上做一些合理的假设

例

“只有你主修计算机科学或不是新生，才可以从校园网访问因特网”

a: 你从校园网访问因特网；

c: 你主修计算机科学；

f: 你是一个新生；

$$a \rightarrow (c \vee \neg f)$$

翻译语言的句子

- 由于语言的二义性，需要把句子译成逻辑表达式以消除歧义
- 有时需要在句子含义基础上做一些合理的假设

例

“只有你主修计算机科学或不是新生，才可以从校园网访问因特网”

a: 你~~可以~~从校园网访问因特网；

c: 你主修计算机科学；

f: 你是一个新生；

$$a \leftrightarrow (c \vee \neg f)$$

翻译语言的句子

- 由于语言的二义性，需要把句子译成逻辑表达式以消除歧义
- 有时需要在句子含义基础上做一些合理的假设

例

“除非你已满16周岁，否则只要你身高不足4英尺就不能乘公园滑行铁道游乐车”

q: 你能乘公园滑行铁道游乐车;

r: 你身高不足4英尺;

s: 你已满16周岁;

$$(r \wedge \neg s) \rightarrow \neg q$$

系统规范说明

- 在说明硬件系统和软件系统时，把自然语言语句翻译成逻辑表达式是很重要的一部分。这些说明可以作为系统开发的基础。

例

表示规范说明“当文件系统满时，自动应答不能够发出”

p: 自动应答能够发出；

q: 文件系统满了；

$$q \rightarrow \neg p$$

系统规范说明的一致性

- 系统规范说明不应该存在冲突，因此，表示这些规范说明的命题表达式应该是一致的。
- 也就是说，对表达式中的各个变量，必然有一个真值赋值使所有表达式为真。

例

1. 诊断消息存储在缓冲区中或是被重传；
2. 诊断消息没有存储在缓冲区中；
3. 如果诊断消息存储在缓冲区中，那么它被重传；

系统规范说明的一致性

- 系统规范说明不应该存在冲突，因此，表示这些规范说明的命题表达式应该是一致的。
- 也就是说，对表达式中的各个变量，必然有一个真值赋值使所有表达式为真。

例

1. 诊断消息存储在缓冲区中或是被重传； $p \vee q$
2. 诊断消息没有存储在缓冲区中； $\neg p$
3. 如果诊断消息存储在缓冲区中，那么它被重传； $p \rightarrow q$

p : 诊断消息存储在缓冲区中； q : 诊断消息被重传

系统规范说明的一致性

- 系统规范说明不应该存在冲突，因此，表示这些规范说明的命题表达式应该是一致的。
- 也就是说，对表达式中的各个变量，必然有一个真值赋值使所有表达式为真。

例

1. 诊断消息存储在缓冲区中或是被重传； $p \vee q$
2. 诊断消息没有存储在缓冲区中； $\neg p$
3. 如果诊断消息存储在缓冲区中，那么它被重传； $p \rightarrow q$

p : 诊断消息存储在缓冲区中； q : 诊断消息被重传

p 为假， q 为真

系统规范说明的一致性

- 系统规范说明不应该存在冲突，因此，表示这些规范说明的命题表达式应该是一致的。
- 也就是说，对表达式中的各个变量，必然有一个真值赋值使所有表达式为真。

例

1. 诊断消息存储在缓冲区中或是被重传； $p \vee q$
2. 诊断消息没有存储在缓冲区中； $\neg p$
3. 如果诊断消息存储在缓冲区中，那么它被重传； $p \rightarrow q$
4. 诊断消息不被重传； $\neg q$

p : 诊断消息存储在缓冲区中； q : 诊断消息被重传

p 为假， q 为真

系统不可实现！

布尔搜索

 [新闻](#) [网页](#) [贴吧](#) [知道](#) [MP3](#) [图片](#) [视频](#) [地图](#) [更多▼](#)

中国科技大学 推荐: [把百度设为主页](#)

[中国科学技术大学少年班学院](#)
浙江大学竺可桢学院来少年班学院访问调研 04-25 我院学生到中国科学院物理研究所参加颁奖会 04-20 庄小威校友获2011年赛克勒国际生物物理学奖 04-14 ...
scgy.ustc.edu.cn/ 2011-7-14 - [百度快照](#)

[电子科技大学](#)
电子科技大学统战部 电子科技大学出版社 成都法语培训中心 电子科技大学学术活动信息 电子科技大学@版权所有 沙河校区地址:成都市建设北路二段四号 邮编:610054 ...
www.uestc.edu.cn/web3 2010-11-6 - [百度快照](#)

[中国科技大学论坛](#) [中科大bbs](#) [中科大论坛](#) [中国科技大学BBS](#) [中科大考研...](#)
中国科技大学论坛 中科大bbs 中科大论坛 中国科技大学BBS 中科大考研论坛 浩海星云 南七技校ustc 中科大研究生论坛 专业|招生|就业|招聘|考研|考博|自考|在线|校报|人才|教...
www.ustc-edu.cn/ 2011-7-14 - [百度快照](#)

[西安电子科技大学研究生院](#)
中国研究生招生信息网 西安电子科技大学 西安电子科技大学科研处 国际合作与... 西安电子科技大学80周年校庆海内外学者系列学术报告会(2011-07-09) 2011 CUDA...
gr.xidian.edu.cn/ 2011-7-12 - [百度快照](#)

[中国科学技术大学教务处](#)
中国科学技术大学教务处网站首页 新闻公告 机构设置 服务指南 本科教学 教学成果 合作交流 创新教育 规章制度 文档下载 2011年7月14日 星期四, 现在是夏季学期...
www.teach.ustc.edu.cn/ 2011-7-14 - [百度快照](#)

逻辑谜题 (logic puzzles)

➤ 可以用逻辑推理解决的问题称为逻辑谜题。

例 16 父亲让两个孩子(一个男孩, 一个女孩)在后院玩耍, 并让他们不要把身上搞脏。然而, 在玩的过程中, 两个孩子都在额头上沾了泥。当孩子们回来后, 父亲说“你们当中至少有一个人额头上有泥”, 然后他问每一个孩子“你知道你额头上有没有泥吗?”同样的问题对每个孩子都问了两遍。假设每个孩子都可以看到对方的额头上是否有泥, 但不能看见自己的额头, 孩子们将会怎样回答呢? 假设两个孩子都很诚实并且都同时回答每一次提问。

逻辑“难题” (logic puzzles)

➤ 可以用逻辑推理解决的“难题”称为逻辑“难题”。

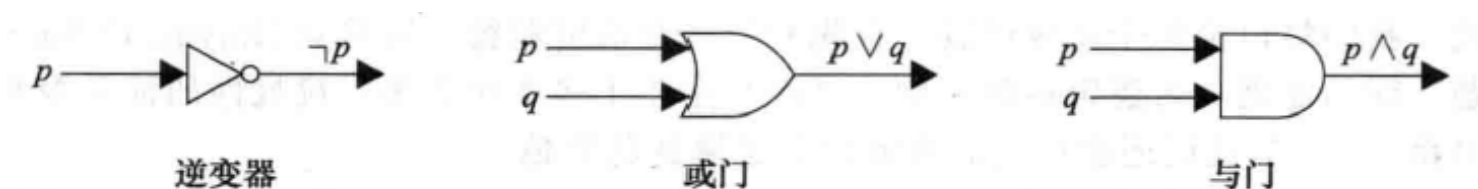
例 16 父亲让两个孩子(一个男孩, 一个女孩)在后院玩耍, 并让他们不要把身上搞脏。然而, 在玩的过程中, 两个孩子都在额头上沾了泥。当孩子们回来后, 父亲说“你们当中至少有一个人的额头上有泥”, 然后他问每一个孩子“你知道你额头上有没有泥吗?”同样的问题对每个孩子都问了两遍。假设每个孩子都可以看到对方的额头上是否有泥, 但不能看见自己的额头, 孩子们将会怎样回答呢? 假设两个孩子都很诚实并且都同时回答每一次提问。

解 令 s 和 d 分别表示命题儿子的额头上有泥和女儿的额头上有泥。当父亲说“你们当中至少有一个人的额头上有泥”时, 表示的是 $s \vee d$ 为真。当父亲第一次问那个问题时两个孩子都将回答“不知道”, 因为他们都看到对方的额头上有泥。也就是说, 儿子知道 d 为真, 但不知道 s 是否为真。而女儿知道 s 为真, 但不知道 d 是否为真。

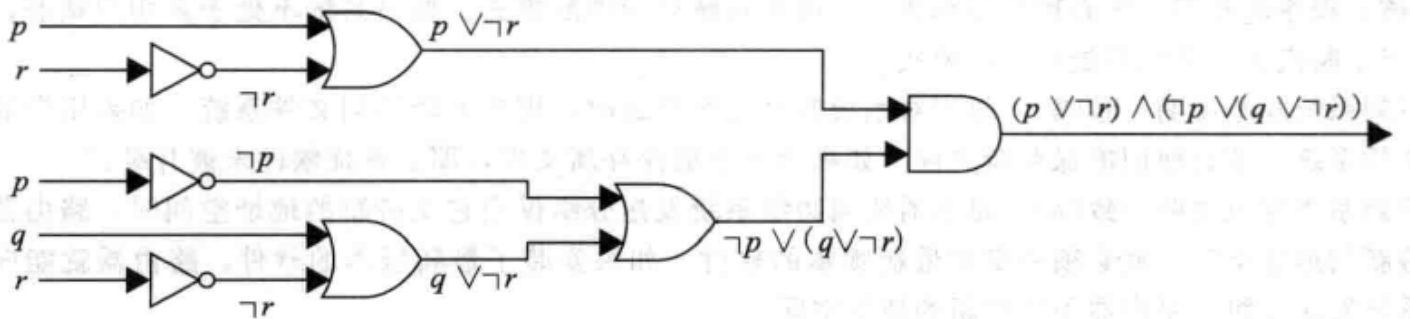
在儿子对第一次询问回答“不知道”后, 女儿可以判断出 d 必为真。这是因为问第一次问题时, 儿子知道 $s \vee d$ 为真, 但不能判断 s 是否为真。利用这个信息, 女儿能够得出结论 d 必定为真, 因为如果 d 为假, 儿子有理由推出, 由于 $s \vee d$ 为真, 那么 s 必定为真, 因此他对第一个问题的回答应为“知道”。儿子也可以类似推断出 s 必为真。因此, 第二次两个孩子都将回答“知道”。■

逻辑电路

- 逻辑电路（数字电路）是计算机硬件设计中最基本的单元。
- 三种简单的基本逻辑门电路：输入为二值信号（0,1）



例



1.3 命题等价

- **永真式 (tautology, 重言式)**：无论其中出现的原子命题的真值是什么，复合命题的真值永远是真；
- **矛盾 (contradiction)**：真值永远为假的复合命题；
- **可能式 (contingency)**：既不是永真式，又不是矛盾的命题。

例

表 1-9 永真式和矛盾的例子

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$	$p \wedge \neg p$
T	F	T	F
F	T	T	F

重言式的性质

- 任何两个重言式的合取、析取、蕴含或双蕴含，仍然是一个重言式。
 - 由简单的重言式可构造出复杂的重言式
 - 由重言式使用公认的规则可以产生许多有用等价式和蕴含式
- 一个重言式，对同一原子命题都用任何原子命题/复合命题置换，其结果仍为一重言式。
 - 置换时被替换的是原子命题，而不能是整个复合命题；
 - 置换时必须对同一原子命题处处替换以同一公式；
 - 例如：可用 $(r \vee s)$ 来替换 $(p \vee \neg p) \vee q$ 中的 p ，结果仍是重言式；但若用 $(r \vee s)$ 替换 $(p \vee \neg p)$ ；则不能保持重言式；用 $(r \vee s)$ 只替换一处 p 得到的 $(r \vee s) \vee \neg p \vee q$ 也不是重言式
- 对于矛盾式也有类似的性质

逻辑等价

➤ **定义** **逻辑等价 (logical equivalences)** :
如果 $p \leftrightarrow q$ 是永真式, 命题 p 和 q 称为是**逻辑等价**的, 用
记号 $p \equiv q$ 来表示, 有时也用 $p \Leftrightarrow q$ 来表示;

➤ $p \Leftrightarrow q$ 与 $p \leftrightarrow q$ 是两个概念;
➤ 判定两个命题是否等价: 使用真值表

➤ 德摩根定律: $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$

例

表 1-10 $\neg(p \vee q)$ 和 $\neg p \wedge \neg q$ 的真值表

p	q	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$
T	T	T	F	F	F	F
T	F	T	F	F	T	F
F	T	T	F	T	F	F
F	F	F	T	T	T	T

逻辑等价

➤ **定义** **逻辑等价 (logical equivalences)** :
如果 $p \leftrightarrow q$ 是永真式, 命题 p 和 q 称为是**逻辑等价**的, 用
记号 $p \equiv q$ 来表示, 有时也用 $p \Leftrightarrow q$ 来表示;

➤ 判定两个命题是否等价: 使用真值表

例 证明 $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

表 5 $p \vee (q \wedge r)$ 和 $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ 是逻辑等价的证明

p	q	r	$q \wedge r$	$p \vee (q \wedge r)$	$p \vee q$	$p \vee r$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	F	T	T	T	T
T	F	T	F	T	T	T	T
T	F	F	F	T	T	T	T
F	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	F	F	T	F	F
F	F	T	F	F	F	T	F
F	F	F	F	F	F	F	F

逻辑等价

-  **定义 逻辑等价 (logical equivalences) :**
如果 $p \leftrightarrow q$ 是永真式, 命题 p 和 q 称为是**逻辑等价**的, 用记号 $p \equiv q$ 来表示, 有时也用 $p \leftrightarrow q$ 来表示;
- 判定两个命题是否等价: 使用真值表
 - 涉及 n 个原子命题的复合命题, 需要 2^n 行
 - 当 n 较大时, 真值表方法行不通
- 判定两个命题是否等价: 使用已建立的等价关系来构造其他等价关系
 - 复合命题中的一个命题可以用与它逻辑等价的命题替换, 而不改变复合命题的真值

重要的等价关系

表 6 逻辑等价式

等 价 式	名 称
$p \wedge T \equiv p$ $p \vee F \equiv p$	恒等律
$p \vee T \equiv T$ $p \wedge F \equiv F$	支配律
$p \vee p \equiv p$ $p \wedge p \equiv p$	幂等律
$\neg(\neg p) \equiv p$	双重否定律
$p \vee q \equiv q \vee p$ $p \wedge q \equiv q \wedge p$	交换律
$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$ $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$	结合律
$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	分配律
$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$ $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$	德·摩根律
$p \vee (p \wedge q) \equiv p$ $p \wedge (p \vee q) \equiv p$	吸收律
$p \vee \neg p \equiv T$ $p \wedge \neg p \equiv F$	否定律

表 7 条件命题的逻辑等价式

$p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$
$p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p$
$p \vee q \equiv \neg p \rightarrow q$
$p \wedge q \equiv \neg(p \rightarrow \neg q)$
$\neg(p \rightarrow q) \equiv p \wedge \neg q$
$(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r) \equiv p \rightarrow (q \wedge r)$
$(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \equiv (p \vee q) \rightarrow r$
$(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r) \equiv p \rightarrow (q \vee r)$
$(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \rightarrow r$

表 8 双条件命题的逻辑等价式

$p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
$p \leftrightarrow q \equiv \neg p \leftrightarrow \neg q$
$p \leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$
$\neg(p \leftrightarrow q) \equiv p \leftrightarrow \neg q$

重要的等价关系

➤ 德摩根律的扩展

$$\neg(p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_n) \equiv (\neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \cdots \wedge \neg p_n)$$

$$\neg(p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n) \equiv (\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \cdots \vee \neg p_n)$$

$$\neg\left(\bigvee_{j=1}^n p_j\right) \equiv \bigwedge_{j=1}^n \neg p_j \text{ 和 } \neg\left(\bigwedge_{j=1}^n p_j\right) \equiv \bigvee_{j=1}^n \neg p_j$$

逻辑等价的性质及例子

- 逻辑等价的性质，和数学中**等号**性质类似
 - 自反性： $p \Leftrightarrow p$
 - 对称性： 若 $p \Leftrightarrow q$ ，则 $q \Leftrightarrow p$
 - 传递性： 若 $p \Leftrightarrow q$ ， $q \Leftrightarrow r$ ，则 $p \Leftrightarrow r$
- 判定两个命题是否等价：使用已建立的等价关系来构造其他等价关系

例 证明 $\neg (p \vee (\neg p \wedge q)) \equiv \neg p \wedge \neg q$

例 证明 $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$ 为永真式

逻辑等价的例子

例 在某研讨会的休息时间，3 名与会者根据王教授的口音对他是哪个省市的人进行了判断：

- 甲说王教授不是南京人，是上海人；
- 乙说王教授不是上海人，是南京人；
- 丙说王教授既不是上海人，也不是杭州人。

听完以上3 人的判断后，王教授笑着说，他们3 人中有一人说的全对，有一人说对了一半，另一人说的全不对。试分析王教授是哪里人？

逻辑等价的例子

例 解：设N：王教授是南京人，S：王教授是上海人，
H：王教授是杭州人；

- 甲的判断为 $\neg N \wedge S$,
- 乙的判断为 $N \wedge \neg S$,
- 丙的判断为 $\neg S \wedge \neg H$.
- 甲的判断全对 $B_1 = \neg N \wedge S$,
- 甲的判断对一半 $B_2 = (\neg N \wedge \neg S) \vee (N \wedge S)$,
- 甲的判断全错 $B_3 = N \wedge \neg S$,
- 乙的判断全对 $C_1 = N \wedge \neg S$,
- 乙的判断对一半 $C_2 = (N \wedge S) \vee (\neg N \wedge \neg S)$,
- 乙的判断全错 $C_3 = \neg N \wedge S$,
- 丙的判断全对 $D_1 = \neg S \wedge \neg H$,
- 丙的判断对一半 $D_2 = (\neg S \wedge H) \vee (S \wedge \neg H)$,
- 丙的判断全错 $D_3 = S \wedge H$.

逻辑等价的例子

$$E = (B_1 \wedge C_2 \wedge D_3) \vee (B_1 \wedge C_3 \wedge D_2) \vee (B_2 \wedge C_1 \wedge D_3) \\ \vee (B_2 \wedge C_3 \wedge D_1) \vee (B_3 \wedge C_1 \wedge D_2) \vee (B_3 \wedge C_2 \wedge D_1)$$

为真命题

$$\begin{aligned} (B_1 \wedge C_2 \wedge D_3) &= (\neg N \wedge S) \wedge ((N \wedge S) \vee (\neg N \wedge \neg S)) \wedge (S \wedge H) \\ &\Leftrightarrow ((\neg N \wedge S \wedge N \wedge S) \vee (\neg N \wedge S \wedge \neg N \wedge \neg S)) \wedge (S \wedge H) \\ &\Leftrightarrow (\mathbf{F} \vee \mathbf{F}) \wedge (S \wedge H) \\ &\Leftrightarrow \mathbf{F} \end{aligned}$$

逻辑等价的例子

$$B_1 \wedge C_3 \wedge D_2 = (\neg N \wedge S) \wedge (\neg N \wedge S) \wedge ((\neg S \wedge H) \vee (S \wedge \neg H))$$

$$\Leftrightarrow (\neg N \wedge S \wedge \neg S \wedge H) \vee (\neg N \wedge S \wedge S \wedge \neg H)$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{F} \vee (\neg N \wedge S \wedge \neg H)$$

$$\Leftrightarrow \neg N \wedge S \wedge \neg H$$

$$(B_3 \wedge C_1 \wedge D_2) = (N \wedge \neg S) \wedge (N \wedge \neg S) \wedge ((\neg S \wedge H) \vee (S \wedge \neg H))$$

$$\Leftrightarrow (N \wedge \neg S \wedge \neg S \wedge H) \vee (N \wedge \neg S \wedge S \wedge \neg H)$$

$$\Leftrightarrow (N \wedge \neg S \wedge H) \vee \mathbf{F}$$

$$\Leftrightarrow (N \wedge \neg S \wedge H)$$

类似可得

$$(B_2 \wedge C_1 \wedge D_3) \Leftrightarrow \mathbf{F}$$

$$(B_2 \wedge C_3 \wedge D_1) \Leftrightarrow \mathbf{F}$$

$$(B_3 \wedge C_2 \wedge D_1) \Leftrightarrow \mathbf{F}$$

逻辑等价的例子

于是, 由同一律可知

$$E \Leftrightarrow (\neg N \wedge S \wedge \neg H) \vee (N \wedge \neg S \wedge H)$$

因为王教授不能既是上海人, 又是杭州人, 因而 $(N \wedge \neg S \wedge H) \Leftrightarrow \mathbf{F}$.

于是只有 $(\neg N \wedge S \wedge \neg H)$ 为真命题, 即王教授是上海人.

甲说的全对, 丙说对了一半, 而乙全说错了.

这一类的推理在报纸、杂志的智力游戏里经常可以看到. 平时我们处理这类推理时并没有这么复杂. 比如: 假设“甲说的全对”, 由乙与甲所说相反, 则乙说的全错, 同时丙说对了一半. 这个假设与王教授所说不矛盾, 所以假设成立, 问题解决. 或者: 王教授不可能同时是两个城市的人, 则丙至少说对了一半, 从而全错只可能是甲乙之一, 然后再来作判断. 这个例子放在这里只是为了说明一种方法.

命题的可满足性

- 一个复合命题称为可满足的：如果存在一个对其变元的真值赋值使其为真（永真式+可能式）
- 判断可满足性
 - 真值表
 - 是否逻辑等价于矛盾式
 - 逻辑推理

例

$$(p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r)$$

$$[(p \vee \neg q) \wedge (q \vee \neg r) \wedge (r \vee \neg p) \wedge (p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r)]$$

命题的可满足性-数独求解

例 大九宫格数独

	2	9				4		
			5			1		
	4							
				4	2			
6							7	
5								
7			3					5
	1			9				
							6	

命题的可满足性-数独求解

➤ 命题 $p(i,j,n)$: 当数 n 位于第 i 行第 j 列的单元时为真

➤ 数独的解需满足（以下所有的合取）：

● 已知数对应单元的 $p(i,j,n)$ 为真，如 $p(1,7,4)$

● 每一行包含了每一个数

$$\bigwedge_{i=1}^9 \bigwedge_{n=1}^9 \bigvee_{j=1}^9 p(i,j,n)$$

● 每一列包含了每一个数

$$\bigwedge_{j=1}^9 \bigwedge_{n=1}^9 \bigvee_{i=1}^9 p(i,j,n)$$

● 每一个九宫格包含了每一个数

$$\bigwedge_{r=0}^2 \bigwedge_{s=0}^2 \bigwedge_{n=1}^9 \bigvee_{i=1}^3 \bigvee_{j=1}^3 p(3r+i, 3s+j, n)$$

● 没有一个单元包含多余一个数

$$p(i, j, n) \rightarrow \neg p(i, j, n')$$

1.4 谓词和量词

- 亚里斯多德的直言三段论理论

例

所有大学生都是青年;

P

参加大运会的运动员是大学生;

Q

所以, 参加大运会的运动员是青年。

R

- 正确的推理, 但在命题逻辑中却无法得到证明

$P \wedge Q \rightarrow R$ 是重言式??

出现问题的原因在于, 三段论中, 结论R与前提P, Q的内在联系不可能在命题逻辑中表示出来。

- 为了刻画命题内部的逻辑结构, 就需研究谓词逻辑

谓词 (predicate)

- 在研究某些推理时，有必要对命题作进一步分析，分析出其中的个体词，谓词和量词，研究它们的形式结构的逻辑关系、正确的推理形式和规则，这些正是谓词逻辑的基本内容
- 命题是具有确定真值的陈述句，从语法上分析，一个陈述句由主语和谓语两部分组成。主语是谓语陈述的对象（称为客体或个体），指出谓语说的是“谁”或者“什么”；谓语是用来陈述主语的，说明主语“怎么样”或者“是什么”（称为谓词）

例

李宁是体操运动员。
主语 谓语
苏格拉底是古希腊哲学家。
主语 谓语
张三比李四高。
主语 谓语

在反映判断的句子中，用以刻画客体的性质或关系的部分即是谓词

谓词

- 含变量的语句，在变量值未知时，语句既不为真，也不为假：“ $x > 3$ ”，“ $x = y + 3$ ”，“ $x + y = z$ ”
- **命题函数（propositional function）**：谓词（predicate）和变量的组合
 - $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 表示命题函数 P 在 n 元组（ n -tuple） $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的值， P 也称为谓词，用来描述个体的属性以及个体之间的关系；

例

$P(x): x > 3$

$Q(x, y): x = y + 3$

$R(x, y, z): x + y = z$

谓词

- 含变量的语句，在变量值未知时，语句既不为真，也不为假：“ $x > 3$ ”，“ $x = y + 3$ ”，“ $x + y = z$ ”
- **命题函数（propositional function）**：谓词（predicate）和变量的组合
 - $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 表示命题函数 P 在 n 元组（ n -tuple） $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的值， P 也称为谓词

例

例 4 考虑语句

if $x > 0$ then $x := x + 1$

当程序中遇到这样一条语句时，变量 x 在程序运行到此刻的值即被代入 $P(x)$ ，也就是代入“ $x > 0$ ”。如果对 x 的这一值 $P(x)$ 为真，即执行赋值语句 $x := x + 1$ ，于是 x 的值增加 1。如果对 x 的这一值 $P(x)$ 为假，则不执行赋值语句，所以 x 的值不改变。 ■

量词

-  **定义** **量化 (quantification)** : 从命题函数产生命题
 - 全称量化 $\forall$ (universal quantification) : Any首字母的倒写
 - 存在量化 $\exists$ (existential quantification) : Exist首字母的反写
- **谓词演算** (predicate calculus) : 与谓词和量词相关的逻辑领域
- **论域** (domain of discourse) : 命题函数中变量的定义域

全称量化

➤  **定义** $P(x)$ 的**全称量化**是命题“ $P(x)$ 对 x 在其论域的所有值为真”，记为 $\forall x P(x)$ 。其中 $\forall$ 称为**全称量词**。命题 $\forall x P(x)$ 表示为“对所有 x ， $P(x)$ ”或“对每个 x ， $P(x)$ ”。

例

$P(x): x+1 > x$

论域：实数集合

$\forall x P(x) = ?$

全称量化

➤  **定义** $P(x)$ 的**全称量化**是命题“ $P(x)$ 对 x 在其论域的所有值为真”，记为 $\forall x P(x)$ 。其中 $\forall$ 称为**全称量词**。命题 $\forall x P(x)$ 表示为“对所有 x ， $P(x)$ ”或“对每个 x ， $P(x)$ ”。

例

$P(x): x+1 > x$

论域：实数集合

$\forall x P(x) = \mathbf{T}$

全称量化

➤  **定义** $P(x)$ 的**全称量化**是命题“ $P(x)$ 对 x 在其论域德所有值为真”，记为 $\forall x P(x)$ 。其中 $\forall$ 称为**全称量词**。命题 $\forall x P(x)$ 表示为“对所有 x ， $P(x)$ ”或“对每个 x ， $P(x)$ ”。

例

$P(x): x < 2$

论域：实数集合

$\forall x P(x) = ?$

全称量化

➤  **定义** $P(x)$ 的**全称量化**是命题“ $P(x)$ 对 x 在其论域德所有值为真”，记为 $\forall x P(x)$ 。其中 $\forall$ 称为**全称量词**。命题 $\forall x P(x)$ 表示为“对所有 x ， $P(x)$ ”或“对每个 x ， $P(x)$ ”。

 **例**

$P(x): x < 2$

论域：实数集合

$\forall x P(x) = \mathbf{F}$

全称量化

➤  **定义** $P(x)$ 的**全称量化**是命题“ $P(x)$ 对 x 在其论域德所有值为真”，记为 $\forall x P(x)$ 。其中 $\forall$ 称为**全称量词**。命题 $\forall x P(x)$ 表示为“对所有 x ， $P(x)$ ”或“对每个 x ， $P(x)$ ”。

➤ 当论域中的所有元素可以一一列出时
$$\forall x P(x) \equiv P(x_1) \wedge P(x_2) \wedge \dots \wedge P(x_n)$$

 **例**

$P(x): x^2 < 10$

论域：不超过4的正整数

$\forall x P(x) = \mathbf{F}$

全称量化

➤  **定义** $P(x)$ 的**全称量化**是命题“ $P(x)$ 对 x 在其论域德所有值为真”，记为 $\forall x P(x)$ 。其中 $\forall$ 称为**全称量词**。命题 $\forall x P(x)$ 表示为“对所有 x ， $P(x)$ ”或“对每个 x ， $P(x)$ ”。

➤ 当论域中的所有元素可以一一列出时
$$\forall x P(x) \equiv P(x_1) \wedge P(x_2) \wedge \dots \wedge P(x_n)$$

 **例**

$P(x): x^2 < 10$

论域：不超过3的正整数

$\forall x P(x) = \mathbf{T}$

全称量化

➤  **定义** $P(x)$ 的**全称量化**是命题“ $P(x)$ 对 x 在其论域德所有值为真”，记为 $\forall x P(x)$ 。其中 $\forall$ 称为**全称量词**。命题 $\forall x P(x)$ 表示为“对所有 x ， $P(x)$ ”或“对每个 x ， $P(x)$ ”。

➤ 当论域中的所有元素可以一一列出时

$$\forall x P(x) \equiv P(x_1) \wedge P(x_2) \wedge \dots \wedge P(x_n)$$

➤ 使用量词时，论域是很重要的

 **例**

$$P(x): x^2 \geq x$$

论域：实数

$$\forall x P(x) = \mathbf{F}$$

全称量化

➤ **定义** $P(x)$ 的**全称量化**是命题“ $P(x)$ 对 x 在其论域德所有值为真”，记为 $\forall x P(x)$ 。其中 $\forall$ 称为**全称量词**。命题 $\forall x P(x)$ 表示为“对所有 x ， $P(x)$ ”或“对每个 x ， $P(x)$ ”。

➤ 当论域中的所有元素可以一一列出时

$$\forall x P(x) \equiv P(x_1) \wedge P(x_2) \wedge \dots \wedge P(x_n)$$

➤ 使用量词时，论域是很重要的

例

$$P(x): x^2 \geq x$$

论域：整数

$$\forall x P(x) = \mathbf{T}$$

全称量化

➤ **定义** $P(x)$ 的**全称量化**是命题“ $P(x)$ 对 x 在其论域德所有值为真”，记为 $\forall x P(x)$ 。其中 $\forall$ 称为**全称量词**。命题 $\forall x P(x)$ 表示为“对所有 x ， $P(x)$ ”或“对每个 x ， $P(x)$ ”。

➤ 当论域中的所有元素可以一一列出时

$$\forall x P(x) \equiv P(x_1) \wedge P(x_2) \wedge \dots \wedge P(x_n)$$

➤ 使用量词时，论域是很重要的

➤ **反例**（counterexample）：论域中使 $P(x)$ 为假的 x 的取值

例

$$P(x): x^2 > 0$$

论域：整数

反例： $x=0$

存在量化

➤ **定义** $P(x)$ 的**存在量化**是命题“论域中存在一个元素 x 使 $P(x)$ 为真”，记为 $\exists x P(x)$ 。其中 $\exists$ 称为**存在量词**。命题 $\exists x P(x)$ 表示为“有一个 x 使得 $P(x)$ ”或“对某个 x ， $P(x)$ ”。

例

$P(x): x > 3$

论域：实数集合

$\exists x P(x) = \mathbf{T}$

存在量化

➤ **定义** $P(x)$ 的**存在量化**是命题“论域中存在一个元素 x 使 $P(x)$ 为真”，记为 $\exists x P(x)$ 。其中 $\exists$ 称为**存在量词**。命题 $\exists x P(x)$ 表示为“有一个 x 使得 $P(x)$ ”或“对某个 x ， $P(x)$ ”。

例

$P(x): x = x + 1$

论域：实数集合

$\exists x P(x) = \mathbf{F}$

存在量化

➤ **定义** $P(x)$ 的**存在量化**是命题“论域中存在一个元素 x 使 $P(x)$ 为真”，记为 $\exists xP(x)$ 。其中 $\exists$ 称为**存在量词**。命题 $\exists xP(x)$ 表示为“有一个 x 使得 $P(x)$ ”或“对某个 x ， $P(x)$ ”。

➤ 当论域中的所有元素可以一一列出时

$$\exists xP(x) \equiv P(x_1) \vee P(x_2) \vee \dots \vee P(x_n)$$

➤ 使用量词时，论域是很重要的

例

$$P(x): x^2 > 10$$

$$\text{论域: } \{1, 2, 3, 4\}$$

$$\exists xP(x) = \mathbf{T}$$

存在量化

➤ **定义** $P(x)$ 的**存在量化**是命题“论域中存在一个元素 x 使 $P(x)$ 为真”，记为 $\exists xP(x)$ 。其中 $\exists$ 称为**存在量词**。命题 $\exists xP(x)$ 表示为“有一个 x 使得 $P(x)$ ”或“对某个 x ， $P(x)$ ”。

➤ 当论域中的所有元素可以一一列出时

$$\exists xP(x) \equiv P(x_1) \vee P(x_2) \vee \dots \vee P(x_n)$$

➤ 使用量词时，论域是很重要的

例

$$P(x): x^2 > 10$$

$$\text{论域: } \{1, 2, 3\}$$

$$\exists xP(x) = \mathbf{F}$$

量词总结

表 1-16 量词

语 句	何时为真?	何时为假?
$\forall xP(x)$	对每一个 x , $P(x)$ 都为真	有一个 x , 使 $P(x)$ 为假
$\exists xP(x)$	有一个 x , 使 $P(x)$ 为真	对每一个 x , $P(x)$ 都为假

- 唯一性量词 ($\exists!$ 或 $\exists_1$) : 存在唯一的 x 使 $P(x)$ 为真

$$\exists! xP(x)$$

- 量词的优先级: 高于合取/析取等逻辑运算符

$$\exists xP(x) \wedge Q(x) = (\exists xP(x)) \wedge Q(x)$$

绑定变量

- 当量词作用于变量 x 或给这一变量赋值时，我们说此变量的这一次出现为**绑定**（**bound**）的；
- 没有被量词绑定或设置为与某一特定值相等的变量出现为**自由**（**free**）的；
 - 出现在命题函数中的所有变量必须通过绑定，才能把此命题函数转变成命题
- 逻辑表达式中应用量词的部分称为这个量词的**作用域**（**scope**）。
 - 判定一个变量是否自由：在指定这个变量的公式中，变量在所有量词的作用域之外

例

$$\exists x Q(x, y)$$

$$\exists x (P(x) \wedge Q(x)) \vee \forall x R(x)$$

绑定变量

- 当量词作用于变量 x 或给这一变量赋值时，我们说此变量的这一次出现为**绑定**（**bound**）的；
- 没有被量词绑定或设置为与某一特定值相等的变量出现为**自由**（**free**）的；
 - 出现在命题函数中的所有变量必须通过绑定，才能把此命题函数转变成命题
- 逻辑表达式中应用量词的部分称为这个量词的**作用域**（**scope**）。
 - 判定一个变量是否自由：在指定这个变量的公式中，变量在所有量词的作用域之外
 - 只要作用域不重叠，相同的字母可以用于表示被不同量词绑定的变量

量词的否定

➤ 全称量词的否定

例

$P(x)$: x 学过一门微积分课

论域: 全班学生

$\forall x P(x)$: 班上每个学生都学过一门微积分课

$\neg (\forall x P(x))$: 并非班上每个学生都学过一门微积分课

$\exists x \neg P(x)$: 班上有个学生没有学过微积分课

$$\neg (\forall x P(x)) \equiv \exists x \neg P(x)$$

量词的否定

表 1-17 量词的否定

否 定	等价语句	何时为真?	何时为假?
$\neg \exists x P(x)$	$\forall x \neg P(x)$	对每个 x , $P(x)$ 为假	有 x , 使 $P(x)$ 为真
$\neg \forall x P(x)$	$\exists x \neg P(x)$	有 x 使 $P(x)$ 为假	对每个 x , $P(x)$ 为真

例

例 16 语句 $\forall x(x^2 > x)$ 和 $\exists x(x^2 = 2)$ 的否定是什么?

涉及量词的逻辑等价

- 涉及谓词和量词的逻辑等价：当且仅当无论用什么谓词代入这些语句，也无论为这些命题函数里的变量指定什么论域，它们都有相同的真值。用 $S \equiv T$ 表示。

例 证明： $\neg \forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$ 和 $\exists x(P(x) \wedge \neg Q(x))$ 是逻辑等价的（始终采用同一个论域）

$$\forall xP(x) \equiv P(x_1) \wedge P(x_2) \wedge \dots \wedge P(x_n)$$

$$\exists xP(x) \equiv P(x_1) \vee P(x_2) \vee \dots \vee P(x_n)$$

涉及量词的逻辑等价

➤ 涉及谓词和量词的逻辑等价：

$$\forall x(P(x) \wedge q) \Leftrightarrow \forall xP(x) \wedge q$$

$$\forall x(P(x) \vee q) \Leftrightarrow \forall xP(x) \vee q$$

$$\exists x(P(x) \wedge q) \Leftrightarrow \exists xP(x) \wedge q$$

$$\exists x(P(x) \vee q) \Leftrightarrow \exists xP(x) \vee q$$

$$\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \Leftrightarrow \forall xP(x) \wedge \forall xQ(x)$$

$$\exists x(P(x) \vee Q(x)) \Leftrightarrow \exists xP(x) \vee \exists xQ(x)$$

$$\forall x(P(x) \rightarrow q) \Leftrightarrow \forall xP(x) \rightarrow q$$

$$\forall x(P(x) \vee Q(x)) \Leftrightarrow \forall xP(x) \vee \forall xQ(x)$$

$$\exists x(P(x) \wedge Q(x)) \Leftrightarrow \exists xP(x) \wedge \exists xQ(x)$$

翻译语句为逻辑表达式

例 使用谓词和量词表达语句“班上的每个学生都学过微积分课”

$C(x)$: x 学过微积分课

论域: 全班学生

$\forall x C(x)$: 班上每个学生都学过微积分课

翻译语句为逻辑表达式

例 使用谓词和量词表达语句“班上的每个学生都学过微积分课”

$C(x)$: x 学过微积分课

论域: 所有人

$S(x)$: x 是班上的学生

$$\forall x(S(x) \rightarrow C(x))$$

翻译语句为逻辑表达式

例 使用谓词和量词表达语句“班上的每个学生都学过微积分课”

$Q(x,y)$: 学生 x 学过课程 y

论域: 所有人, 所有课程

$S(x)$: x 是班上的学生

$$\forall x(S(x) \rightarrow Q(x, \text{微积分}))$$

选自Lewis Carroll的例子

例

“所有蜂鸟都五彩斑斓。”

$$\forall x(P(x) \rightarrow S(x))$$

“没有大鸟以蜜为生。”

$$\neg \exists x(Q(x) \wedge R(x))$$

“不以蜜为生的鸟都色彩单调。”

$$\forall x(\neg R(x) \rightarrow \neg S(x))$$

“蜂鸟都是小鸟。”

$$\forall x(P(x) \rightarrow \neg Q(x))$$

$P(x)$: x 是只蜂鸟

论域: 所有鸟

$Q(x)$: x 是大的

$R(x)$: x 以蜜为生

$S(x)$: x 五彩斑斓

1.5 嵌套量词

- **嵌套量词**（Nested Quantifiers）：出现在其他量词的作用域中的量词。

例

$$\forall x \forall y (x + y = y + x)$$

$$\forall x \exists y (x + y = 0)$$

$$\forall x \forall y \forall z (x + (y + z) = (x + y) + z)$$

$$\forall x \forall y ((x > 0) \wedge (y < 0) \rightarrow (xy < 0))$$

循环量化思考

- 循环量化思考：借助嵌套循环来思考多个变量使用量词的情况。

表 1-18 两个变量的量化

语 句	何时为真?	何时为假?
$\forall x \forall y P(x, y)$ $\forall y \forall x P(x, y)$	对每一对 x, y , $P(x, y)$ 均为真	有一对 x, y 使 $P(x, y)$ 为假
$\forall x \exists y P(x, y)$	对每个 x , 都有 y 使 $P(x, y)$ 为真	有 x , 使 $P(x, y)$ 对每个 y 总是假
$\exists x \forall y P(x, y)$	有一个 x , 使 $P(x, y)$ 对所有 y 均为真	对每个 x 都有 y 使 $P(x, y)$ 为假
$\exists x \exists y P(x, y)$ $\exists y \exists x P(x, y)$	有一对 x, y 使 $P(x, y)$ 为真	对每一对 x, y , $P(x, y)$ 均为假

循环量化思考

例

$$Q(x,y,z):x+y=z$$

论域：所有实数

$$\forall x \forall y \exists z Q(x,y,z) = ?$$

$$\exists z \forall x \forall y Q(x,y,z) = ?$$

循环量化思考

例

$$Q(x,y,z):x+y=z$$

论域：所有实数

$$\forall x \forall y \exists z Q(x,y,z) = \mathbf{T}$$

对所有实数 x 和所有实数 y ，有实数 z ，使得 $x+y=z$

$$\exists z \forall x \forall y Q(x,y,z) = \mathbf{F}$$

有实数 z 使得对所有实数 x 和所有实数 y ， $x+y=z$

量词的顺序

- 除非所有量词均为全称量词或存在量词，否则量词的顺序是很重要的。

例

$$P(x,y):x+y=y+x$$

论域：所有实数

$$\forall x \forall y P(x,y) = ?$$

量词的顺序

- 除非所有量词均为全称量词或存在量词，否则量词的顺序是很重要的。

例

$$P(x,y):x+y=y+x$$

论域：所有实数

$$\forall x \forall y P(x,y) = \mathbf{T}$$

量词的顺序

- 除非所有量词均为全称量词或存在量词，否则量词的顺序是很重要的。

例

$$Q(x,y):x+y=0$$

论域：所有实数

$$\exists y \forall x Q(x,y) = ?$$

$$\forall x \exists y Q(x,y) = ?$$

量词的顺序

- 除非所有量词均为全称量词或存在量词，否则量词的顺序是很重要的。

例

$$Q(x,y):x+y=0$$

论域：所有实数

$$\exists y \forall x Q(x,y) = \mathbf{F}$$

有个实数 y 能使 $Q(x,y)$ 对每一个实数 x 成立

$$\forall x \exists y Q(x,y) = \mathbf{T}$$

对每个实数 x 都有一个实数 y 使 $Q(x, y)$ 成立

翻译涉及嵌套量词的语句

- 写出表达式中的量词和谓词的含义
- 用简单的句子来表达这个含义

例

$$\exists x \forall y \forall z ((F(x, y) \wedge F(x, z) \wedge (y \neq z)) \rightarrow \neg F(y, z))$$

$F(a, b)$: a和b是朋友

论域: 学校所有学生

翻译涉及嵌套量词的语句

- 写出表达式中的量词和谓词的含义
- 用简单的句子来表达这个含义

例

$$\exists x \forall y \forall z ((F(x, y) \wedge F(x, z) \wedge (y \neq z)) \rightarrow \neg F(y, z))$$

$F(a, b)$: a和b是朋友

论域: 学校所有学生

有个学生，他的朋友之间都不是朋友

将语句翻译成逻辑表达式

例 将语句“每个人都恰有一个最好的朋友”翻译成逻辑表达式

$B(x,y)$: y 是 x 的最好的朋友

论域: 所有人

x 恰有一个最好的朋友意味着有一个人 y 是 x 的最好的朋友, 而且, 对每个人 z , 若果 z 不是 y , 那么 z 不是 x 的最好的朋友。

$$\forall x \exists y (B(x,y) \wedge \forall z ((z \neq y) \rightarrow \neg B(x,z)))$$

将语句翻译成逻辑表达式

例 将语句“有一个妇女已搭乘过世界上每一条航线上的航班”翻译成逻辑表达式

$P(w, f)$: w 搭乘过 f

$Q(f, a)$: f 是 a 上的航班

论域: 所有妇女, 所有航班, 所有航线

$$\exists w \forall a \exists f (P(w, f) \wedge Q(f, a))$$

将数学语句翻译成逻辑表达式

例 将语句“两个正整数的和是正数”翻译成逻辑表达式。

x : 正整数

y : 正整数

论域: 全体整数

$$\forall x \forall y ((x > 0) \wedge (y > 0) \rightarrow (x + y > 0))$$

将数学语句翻译成逻辑表达式

例 将语句“每个实数（除了零）都有乘法逆元”翻译成逻辑表达式。

x : 实数, $x \neq 0$

论域: 实数

$$\forall x((x \neq 0) \rightarrow \exists y(xy = 1))$$

否定嵌套量词

- 可以通过连续的应用否定单个量词的规则来否定带嵌套量词的语句

表 1-17 量词的否定

否 定	等价语句	何时为真?	何时为假?
$\neg \exists x P(x)$	$\forall x \neg P(x)$	对每个 x , $P(x)$ 为假	有 x , 使 $P(x)$ 为真
$\neg \forall x P(x)$	$\exists x \neg P(x)$	有 x 使 $P(x)$ 为假	对每个 x , $P(x)$ 为真

否定嵌套量词

- 可以通过连续的应用否定单个量词的规则来否定带嵌套量词的语句

例 使用量词表示语句“没有一个妇女已搭乘过世界上每一条航线上的航班”

$P(w, f)$: w 搭乘过 f

$Q(f, a)$: f 是 a 上的航班

论域: 所有妇女

所有航班

所有航线

$$\neg \exists w \forall a \exists f (P(w, f) \wedge Q(f, a))$$

$$\equiv \forall w \neg \forall a \exists f (P(w, f) \wedge Q(f, a))$$

$$\equiv \forall w \exists a \neg \exists f (P(w, f) \wedge Q(f, a))$$

$$\equiv \forall w \exists a \forall f \neg (P(w, f) \wedge Q(f, a))$$

$$\equiv \forall w \exists a \forall f (\neg P(w, f) \vee \neg Q(f, a))$$

1.6 推理规则

- **定理 (theorem)**：可以被证明为真的命题。
- **证明 (proof)**：用一系列命题来证明一条定理为真，这些命题就形成一项论证，称为证明。
- **公理 (axioms)**：或称为**公设 (postulates)**，是关于数学结构的基本假设。
- **推理规则 (rules of inference)**：是从其他断言得出结论所用的方法，用来把证明的各个步骤联系起来。
- **引理 (lemma)**：在其他定理证明中所用的简单定理
- **推论 (corollary)**：从已经证明了的定理直接证实的命题
- **猜想 (conjecture)**：真值未知的命题。

推理规则

- **假言推理 (modus ponens)**：又称**分离规则 (law of detachment)**，以重言式 $(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q$ 为基础的推理规则。假言推理是说，若蕴含式及其前提为真，则这个蕴含式的结论为真。

表 1-5 蕴含 $p \rightarrow q$ 的真值表

$$\begin{array}{l} p \\ p \rightarrow q \\ \hline \therefore q \end{array}$$

p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

假言推理的例子

- **假言推理 (modus ponens)**：又称**分离规则 (law of detachment)**，以重言式 $(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q$ 为基础的推理规则。假言推理是说，若蕴含式及其前提为真，则这个蕴含式的结论为真。

例

例 1 假定蕴含式“若今天下雪，则将去滑雪”和它的前件“今天正在下雪”都为真。那么，根据假言推理，得出蕴含式的后件“将去滑雪”为真。 ■

例 2 蕴含式“若 n 被 3 整除，则 n^2 被 9 整除”为真。所以，若 n 被 3 整除，则根据假言推理得出 n^2 被 9 整除。 ■

一些基本的推理规则

表 1 推理规则

推 理 规 则	永 真 式	名 称
$\frac{p \quad p \rightarrow q}{\therefore q}$	$(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q$	假言推理
$\frac{\neg q \quad p \rightarrow q}{\therefore \neg p}$	$(\neg q \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow \neg p$	取拒式
$\frac{p \rightarrow q \quad q \rightarrow r}{\therefore p \rightarrow r}$	$((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r)$	假言三段论
$\frac{p \vee q \quad \neg p}{\therefore q}$	$((p \vee q) \wedge \neg p) \rightarrow q$	析取三段论
$\frac{p}{\therefore p \vee q}$	$p \rightarrow (p \vee q) \quad \mathbf{p \Rightarrow (p \vee q)}$	附加律
$\frac{p \wedge q}{\therefore p}$	$(p \wedge q) \rightarrow p$	化简律
$\frac{p \quad q}{\therefore p \wedge q}$	$((p) \wedge (q)) \rightarrow (p \wedge q)$	合取律
$\frac{p \vee q \quad \neg p \vee r}{\therefore q \vee r}$	$((p \vee q) \wedge (\neg p \vee r)) \rightarrow (q \vee r)$	消解律

假言三段论的例子

例

说出在下列论证里使用哪个推理规则：

若今天下雨，则我们今天将不野餐。若我们今天不野餐，则我们明天将野餐。因此，若今天下雨，则我们明天将野餐。

p :今天下雨

q :我们今天将不野餐

r :我们明天将野餐

$$p \rightarrow q$$

$$\underline{q \rightarrow r}$$

$$\therefore p \rightarrow r$$

这个论证是假言三段论 (hypothetical syllogism)

有效论证

- 若每当所有的前提都为真时，结论也为真，则这样的论证称为**有效的**。
- 设 $p_1, p_2, \dots, p_n$ 和 q 是命题，当且仅当 $(p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n) \rightarrow q$ 为一重言式，称 q 为 $p_1, p_2, \dots, p_n$ 的有效结论，记为 $(p_1 \wedge p_2 \wedge \dots \wedge p_n) \Rightarrow q$ ；
- 有效论证强调的是推理的有效性，而不在于结论是否正确：当在有效论证中用到一个或多个假命题时，该论证可能得出不正确的结论；
- 当存在许多前提时，为了证明一个论证是有效的，就常常需要多个推理规则

有效论证的例子

例

例6 证明：前提“今天下午没有出太阳并且今天比昨天冷”，“只有今天下午出太阳，我们才将去游泳”，“若我们不去游泳，则我们将乘独木舟游览”，以及“若我们乘独木舟游览，则我们将在黄昏时回家”，导致结论“我们将在黄昏时回家”。

p: 今天下午出太阳

q: 今天比昨天冷

r: 我们将去游泳

s: 我们将乘独木舟游览

t: 我们将在黄昏时回家

消解

- **消解** (resolution)：基于以下永真式的推理规则，析取 $q \vee r$ 称为**消解式** (resolvent)。

$$((p \vee q) \wedge (\neg p \vee r)) \rightarrow (q \vee r)$$

- 在计算机程序中经常使用的推理规则；
- 当 $r = \mathbf{F}$ 时，消解规则成为了析取三段论规则

例 使用消解证明假设“Jasmine在滑雪或没有下雪”和“下雪了或Bart在打曲棍球”蕴含结论“Jasmine在滑雪或Bart在打曲棍球。”

p: 下雪了

q: Jasmine在滑雪

r: Bart在打曲棍球

假设为: $\neg p \vee q, p \vee r$ **消解得到: $q \vee r$**

消解

- **消解** (resolution)：基于以下永真式的推理规则，析取 $q \vee r$ 称为**消解式** (resolvent)。

$$((p \vee q) \wedge (\neg p \vee r)) \rightarrow (q \vee r)$$

- 在计算机程序中经常使用的推理规则；
- 当 $r = \mathbf{F}$ 时，消解规则成为了析取三段论规则

例

证明假设 $(p \wedge q) \vee r$ 和 $r \rightarrow s$ 蕴含结论 $p \vee s$ 。

谬误

- **肯定结论谬误** (fallacy of affirming the conclusion) : 命题 $[(p \rightarrow q) \wedge q] \rightarrow p$ 不是重言式。
- **否定假设谬误** (fallacy of denying the hypothesis) : 命题 $[(p \rightarrow q) \wedge \neg p] \rightarrow \neg q$ 不是重言式。

例 下面的论证是否有效？

若你做过本书的每一道练习，则你学习过离散数学。
你学习过离散数学。因此你做过本书的每一道练习。

p: 你做过本书的每一道练习

q: 你学习过离散数学

谬误

- **肯定结论谬误** (fallacy of affirming the conclusion) : 命题 $[(p \rightarrow q) \wedge q] \rightarrow p$ 不是重言式。
- **否定假设谬误** (fallacy of denying the hypothesis) : 命题 $[(p \rightarrow q) \wedge \neg p] \rightarrow \neg q$ 不是重言式。

例 下面的论证是否有效？

若你做过本书的每一道练习，则你学习过离散数学。
你没有做过本书的每一道练习。因此你没有学习过离散数学。

p : 你做过本书的每一道练习

q : 你学习过离散数学

带量词命题的推理规则

推 理 规 则	名 称
$\frac{\forall x P(x)}{\therefore P(c)}$	全称实例
$\frac{P(c), \text{任意 } c}{\therefore \forall x P(x)}$	全称引入
$\frac{\exists x P(x)}{\therefore P(c), \text{对某个元素 } c}$	存在实例
$\frac{P(c), \text{对某个元素 } c}{\therefore \exists x P(x)}$	存在引入

带量词命题的推理规则

例 证明前提“在这个班上的某个学生没有读过书”和“班上的每个人都通过了第一门考试”蕴含结论“通过考试的某个人没有读过书”。

$C(x)$: x 在这个班中

$B(x)$: x 读过书了

$P(x)$: x 通过了第一门考试

论域：所有学生

命题推理规则和量词推理规则的结合

- 数学论证中常常既使用命题推理规则，又使用量词推理规则。
- 全称例示和假言推理结合： $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge P(c) \rightarrow Q(c)$

例

$P(x)$: x 是大学生; $Q(x)$: x 是青年; c : 参加大运会的运动员

所有大学生都是青年;	$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$
参加大运会的运动员是大学生;	$P(c)$
所以, 参加大运会的运动员是青年。	$Q(c)$

- 全称生成规则在定理证明中, 有时候不明确指出。
- 若 a, b 是正实数, 则 $a > b$ 推出 $a^2 > b^2$;

1.7 证明导论

- 定理 (**theorem**)：可以被证明为真的命题。
- 证明 (**proof**)：用一系列命题来证明一条定理为真，这些命题就形成一项论证，称为证明。
- 公理 (**axioms**)：或称为公设 (**postulates**)，是关于数学结构的基本假设。
- 推理规则 (**rules of inference**)：是从其他断言得出结论所用的方法，用来把证明的各个步骤联系起来。
- 引理 (**lemma**)：在其他定理证明中所用的简单定理
- 推论 (**corollary**)：从已经证明了的定理直接证实的命题
- 猜想 (**conjecture**)：真值未知的命题。

证明定理的方法

- 直接证明 (direct proof)
- 间接证明 (proof by contraposition)
- 空证明 (vacuous proof)
- 平凡证明 (trivial proof)
- 归谬证明 (proof by contradiction)
- 分情形证明
- 等价性证明 (proof of equivalence)

直接证明

- **直接证明**：通过证明若 p 为真则 q 也必然为真，来证明蕴含式 $p \rightarrow q$ 为真；

定义 整数 n 是**偶数**，如果存在一个整数 k 是的 $n=2k$ ；
整数 n 是**奇数**，如果存在一个整数 k 是的 $n=2k+1$ 。

例 给出定理“若 n 是奇数，则 n^2 是奇数”的直接证明

间接证明（反证法）

➤ **间接证明**：通过证明逆否命题 $\neg q \rightarrow \neg p$ ，来证明蕴含式 $p \rightarrow q$ ；



给出定理“若 $3n+2$ 是奇数，则 n 是奇数”的间接证明

空证明和平凡证明

- **空证明**：通过证明 p 为假，来证明蕴含式 $p \rightarrow q$ 为真；
 - 主要用于证明一些定理的特殊情况

例

证明命题 $P(0)$ 为真，其中 $P(n)$ 是命题函数“若 $n > 1$ ，则 $n^2 > n$ ”

- **平凡证明**：通过证明 q 为真，来证明蕴含式 $p \rightarrow q$ 为真；
 - 主要用于证明定理的特殊情形以及数学归纳法中

例

设 $P(n)$ 是命题“若 a 和 b 是满足的 $a \geq b$ 的正整数，则 $a^n \geq b^n$ ”。证明 $P(0)$ 为真。

归谬证明

- **归谬证明**：假定可以找到矛盾式 q （比如 $q=r \wedge \neg r$ ）使得 $\neg p \rightarrow q$ 为真，即 $\neg p \rightarrow \mathbf{F}$ 为真，则命题 $\neg p$ 必然为假，所以 p 必然为真。



通过给出归谬证明来证明 $\sqrt{2}$ 是无理数。



定义 实数 r 是**有理数**，若存在整数 p 和 $q(q \neq 0)$ 使得 $r=p/q$ 。不是有理数的实数称为**无理数**。

等价性证明

- **等价性证明**：为了证明形如 $p \leftrightarrow q$ 的命题，可以使用重言式 $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow [(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)]$ ，若需证明多个命题等价，则可使用重言式

$$[p_1 \leftrightarrow p_2 \leftrightarrow \cdots \leftrightarrow p_n] \leftrightarrow [(p_1 \rightarrow p_2) \wedge (p_2 \rightarrow p_3) \wedge \cdots \wedge (p_n \rightarrow p_1)]$$

例 证明下列三个命题等价：

p_1 ： n 是偶数

p_2 ： $n-1$ 是奇数

p_3 ： n^2 是偶数

反例

➤ **反例**：一般用于证明形如 $\forall xP(x)$ 的语句为假。

例

证明语句“每个正整数都是三个整数的平方和”为假。

解 如果能找到一个反例，便能证明此语句为假。要寻找反例，我们试着写出可满足语句条件的连续的正整数。可以发现 $1=0^2+0^2+1^2$, $2=0^2+1^2+1^2$, $3=1^2+1^2+1^2$, $4=0^2+0^2+2^2$, $5=0^2+1^2+2^2$, $6=1^2+1^2+2^2$, 但我们无法找到方法将 7 写为三个整数的平方和。要证明 7 是一个反例，请注意可用的不超过 7 的平方数只有 0、1 或 4，而三个项（每项为 0、1 或 4）相加却得不出 7，所以 7 是一个反例。

➤ 无论存在多少个使 $P(x)$ 为真的特例， $\forall xP(x)$ 的语句仍可能为假

例

语句“每个正整数都是 18 个四次方整数之和”是否为真？也就是，命题 $\forall nP(n)$ 是否是定理，其中 $P(n)$ 是语句“ n 可以被写为 18 个四次方整数之和”，论域是全体正整数？

证明中的错误

例

下面这个著名的假定“证明”(即 $1=2$) 错在哪里?

“证明”步骤如下, 其中 a 和 b 是两个相等的正整数。

步骤

理由

1. $a=b$

给定的前提

2. $a^2=ab$

步骤 1 两边乘以 a

3. $a^2-b^2=ab-b^2$

步骤 2 两边减去 b^2

4. $(a-b)(a+b)=b(a-b)$

步骤 3 两边分解因式

5. $a+b=b$

步骤 4 两边除以 $a-b$

6. $2b=b$

步骤 5 把 a 替换成 b , 因为 $a=b$ 并化简

7. $2=1$

步骤 6 两边除以 b

1.8 证明方法和策略-分情形证明

➤ **分情形证明**: 为了证明蕴含式 $(p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_n) \rightarrow q$, 使用以下重言式来作为推理规则

$$[(p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_n) \rightarrow q] \leftrightarrow [(p_1 \rightarrow q) \wedge (p_2 \rightarrow q) \wedge \dots \wedge (p_n \rightarrow q)]$$

例

用分情形证明法证明 $|xy| = |x||y|$, 其中 x 和 y 是实数。($|x|$ 是 x 的绝对值, 当 $x \geq 0$ 时, $|x| = x$; 当 $x \leq 0$ 时, $|x| = -x$ 。)

p : x 和 y 都是实数

q : $|xy| = |x||y|$

$P1$: $x \geq 0, y \geq 0$

$P2$: $x \geq 0, y < 0$

$P3$: $x < 0, y \geq 0$

$P4$: $x < 0, y < 0$

分情形帮助证明

- **分情形证明**：当没有明显方式可以开始证明，而分情形后，每种情形的额外信息可以帮助证明时。
 - 绝对值：负数，非负数
 - 被 n 整除： $nk, nk+1, \dots, nk+n-1$

例

证明：如果 n 是不能被2或3整除的整数，则 n^2-1 能被24整除。

例

证明： $x^2+3y^2=8$ 没有整数解 x 和 y 。

证明中的错误

例

下面的“证明”错在哪里？

“定理”：如果 x 是实数，则 x^2 是正实数。

“证明”：令 p_1 为“ x 是正数”， p_2 为“ x 是负数”， q 为“ x^2 是正数”。要证明 $p_1 \rightarrow q$ ，注意，当 x 是正数时， x^2 为正数，因为两个正数 x 和 x 的积肯定为正。要证明 $p_2 \rightarrow q$ ，注意当 x 是负数时， x^2 是正数，因为 x^2 是两个负数的积。证毕。

定理和量词 – 存在性证明

➤ **存在性证明**：形如 $\exists xP(x)$ 的命题的证明。

➤ 构造性的存在性证明：通过找出一个使得 $P(a)$ 为真的元素 a 来证明

例

证明存在某个正整数，可以用两种不同的方法将其表示为正整数的立方和。

$$1729 = 10^3 + 9^3 = 12^3 + 1^3$$

➤ 非构造性的存在性证明：通过其它方法来证明

例

证明存在无理数 x 和 y 使得 x^y 是有理数

唯一性证明

➤ **唯一性证明**：证明具有特定性质的元素唯一存在。即证明 $\exists x(P(x) \wedge \forall y(y \neq x \rightarrow \neg P(y)))$ 。

例

证明每个整数都有一个唯一的加性逆。也就是证明，如果 P 是整数，那么存在一个唯一的整数 q 使得 $p + q = 0$ 。

证明策略

- 蕴含式的证明：先尝试直接证明，再尝试间接证明，然后尝试归谬证明。
- **前推**：从一个起点开始，利用公理和已知定理，用导向结论的一系列步骤来构造证明。
- **后推**：为了证明命题 q ，就寻找能证明具有性质 $p \rightarrow q$ 的命题 p 。
 - 寻找能证明使得 $q \rightarrow r$ 的 r 不会有帮助

例

给定两个正实数 a 和 b ，其**算术均值**是 $(a+b)/2$ ，**几何均值**是 $\sqrt{ab}$ ，证明算术均值总是大于几何均值。

修改现存证明

例 证明：存在无穷多个形如 $4k+3$ 的素数，其中 k 是非负整数。

解 相似问题证明：假设只存在有穷多个素数 $p_1, p_2, \dots, p_n$ ，并且构造出数 $p_1 p_2 \cdots p_n + 1$ 。这个数要么是素数，要么具有与素数 $p_1, p_2, \dots, p_n$ 中每个都不同的素因子，于是证明了无穷多个素数。

本问题的证明：假设只存在有穷多个形如 $4k+3$ 的素数，即 $q_1, q_2, \dots, q_n$ ，构造

$$Q = 4q_1 q_2 \cdots q_n - 1$$

棋盘拼接游戏 (Tiled)

- 标准棋盘 (standard checkerboard) : $8*8$ 的标准国际象棋棋盘
- 拼板 (board) : 任意大小的矩形棋盘或删除一个或多个方格后的棋盘
- 骨牌 (domino) : $1*2$ 的方格

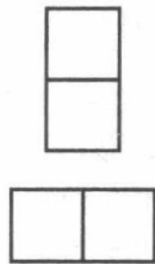
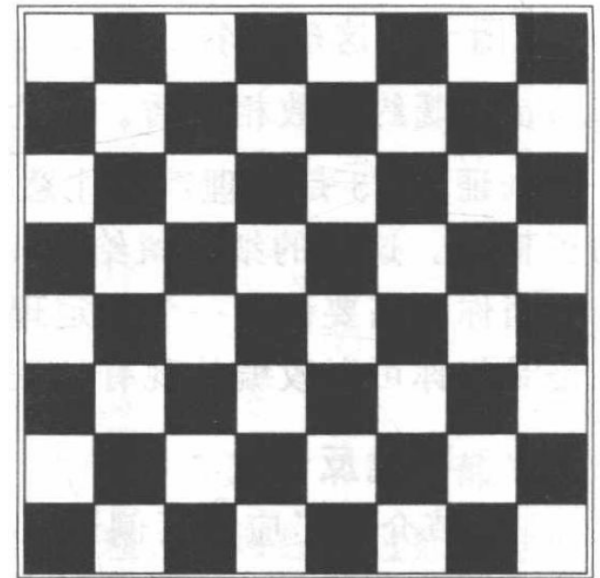
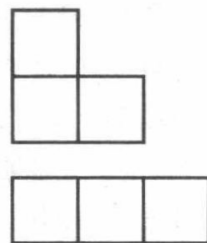
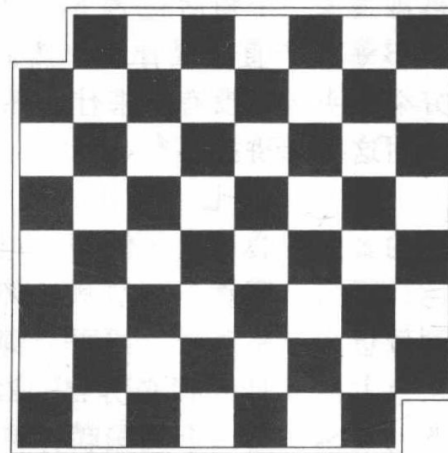


图3 两种骨牌



棋盘拼接游戏 (Tiled)

- 拼接标准棋盘?
- 拼接去掉一个角的棋盘?
- 拼接去掉对称两个角的棋盘?
 - 考虑黑格和白格的个数
- 直三联骨牌拼接去掉一个角的棋盘?
 - 棋盘改成三种颜色
 - 考虑不同颜色棋盘格的个数



一个直角三联骨牌和一个直三联骨牌

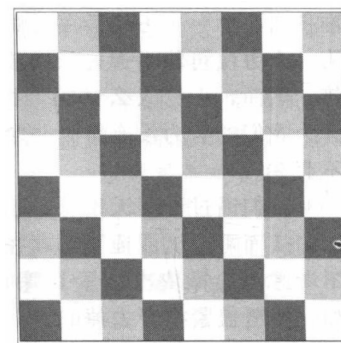


图7 用三种颜色对标准棋盘方格着色

猜想与证明

➤ **定理** 当 $a > 2$ 或者当 $a = 2$ 且 n 是合数时，整数 $a^n - 1$ 是合数。

例 希望找到一个函数，对所有正整数 n 来说，函数 $f(n)$ 都是素数。

$$f(n) = n^2 - n + 41$$

对所有不超过40的正整数 n 来说 $f(n)$ 是素数。

可以证明：对于每个整系数多项式 $f(n)$ ，都存在正整数 y ，使得 $f(y)$ 是合数。

猜想与证明

- **定理** 费马大定理：若 n 为大于2的整数，则

$$x^n + y^n = z^n$$

没有正整数解。

- **3x+1猜想（Collatz猜想）**：若变换 T 把偶数 x 转换为 $x/2$ ，把奇数 x 转换为 $3x+1$ ，则对于所有正整数 x ，当反复应用变换 T ，最终会得到整数1。
- 已验证到 5.6×10^{13}