某些Châtelet曲面丛的算术研究

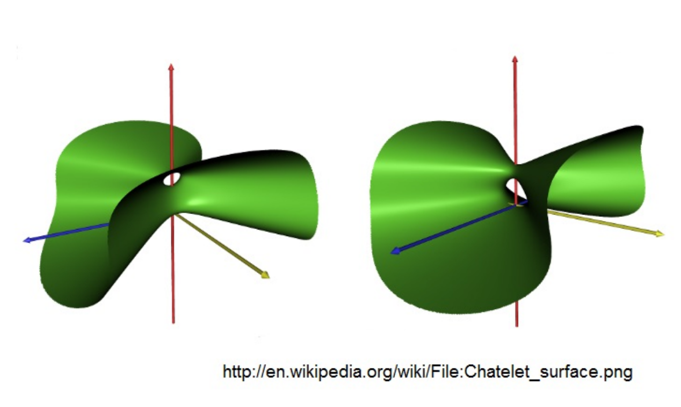
梁 永祺　　中国科学技术大学

金坛数论学术会议(第八届全国数论会议)
2021年6月30日


华罗庚
1910.11–1985.6

Definition

$S =$

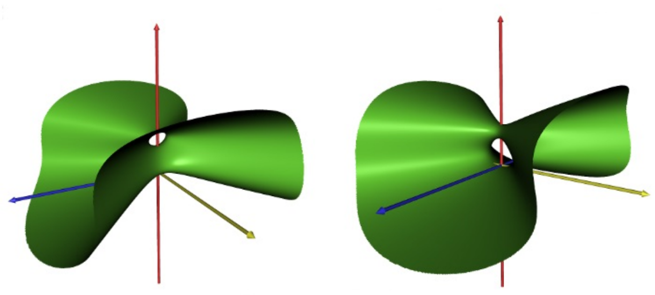


称为Châtelet曲面。

- 本报告研究Châtelet曲面丛：一族这类曲面构成的全空间。

Definition

$S =$



http://en.wikipedia.org/wiki/File:Chatelet_surface.png

称为Châtelet曲面。

- 本报告研究Châtelet曲面丛：一族这类曲面构成的全空间。

- 这个射影曲面S的一个仿射开集S^o由以下具体的方程定义
- $y^2 - az^2 = P(x)$，其中坐标$(x, y, z) \in \mathbb{A}^3$，
  $a \in K^*$（基域），$P(x) \in K[x]$次数$= 4$.
- 事实上，只要给定一个这样的仿射方程，可以通过粘贴还原出射影模型S：
- $(x, y : z : u) \in (\mathbb{P}^1 \setminus \{\infty\}) \times \mathbb{P}^2$
  $y^2 - az^2 = u^2 P(x)$
- $(x', y : z : u') \in (\mathbb{P}^1 \setminus \{0\}) \times \mathbb{P}^2$
  $y^2 - az^2 = u'^2 P^*(x')$
- 其中$P^*(x') = x'^4 P(1/x')$为$P(x)$的互反（reciprocal）多项式
  $\deg(P^*) = 3$或4
- 通过粘贴还原出S：$x = 1/x'$，　$u = x'^2 u'$

- 这个射影曲面S的一个仿射开集S^o由以下具体的方程定义
- $y^2 - az^2 = P(x)$，其中坐标$(x, y, z) \in \mathbb{A}^3$，
  $a \in K^*$（基域），$P(x) \in K[x]$次数$= 4$.
- 事实上，只要给定一个这样的仿射方程，可以通过粘贴还原出射影模型S:
- $(x, y : z : u) \in (\mathbb{P}^1 \setminus \{\infty\}) \times \mathbb{P}^2$
  $y^2 - az^2 = u^2P(x)$
- $(x', y : z : u') \in (\mathbb{P}^1 \setminus \{0\}) \times \mathbb{P}^2$
  $y^2 - az^2 = u'^2P^*(x')$
- 其中$P^*(x') = x'^4P(1/x')$为$P(x)$的互反（reciprocal）多项式
  $\deg(P^*) = 3$或4
- 通过粘贴还原出S: $x = 1/x'$, $u = x'^2u'$

- 这个射影曲面S的一个仿射开集S°由以下具体的方程定义
- $y^2 - az^2 = P(x)$，其中坐标$(x, y, z) \in \mathbb{A}^3$，
  $a \in K^*$（基域），$P(x) \in K[x]$次数$= 4$.
- 事实上，只要给定一个这样的仿射方程，可以通过粘贴还原出射影模型S：
- $(x, y : z : u) \in (\mathbb{P}^1 \setminus \{\infty\}) \times \mathbb{P}^2$
  $y^2 - az^2 = u^2 P(x)$
- $(x', y : z : u') \in (\mathbb{P}^1 \setminus \{0\}) \times \mathbb{P}^2$
  $y^2 - az^2 = u'^2 P^*(x')$
- 其中$P^*(x') = x'^4 P(1/x')$为$P(x)$的互反（reciprocal）多项式
  $\deg(P^*) = 3$或4
- 通过粘贴还原出S：$x = 1/x'$，$u = x'^2 u'$

- 这个射影曲面S的一个仿射开集S^o由以下具体的方程定义
- $y^2 - az^2 = P(x)$，其中坐标$(x, y, z) \in \mathbb{A}^3$，
  $a \in K^*$（基域），$P(x) \in K[x]$次数$= 4.$
- 事实上，只要给定一个这样的仿射方程，可以通过粘贴还原出射影模型S：
- $(x, y : z : u) \in (\mathbb{P}^1 \setminus \{\infty\}) \times \mathbb{P}^2$
  $y^2 - az^2 = u^2 P(x)$
- $(x', y : z : u') \in (\mathbb{P}^1 \setminus \{0\}) \times \mathbb{P}^2$
  $y^2 - az^2 = u'^2 P^*(x')$
- 其中$P^*(x') = x'^4 P(1/x')$为$P(x)$的互反（reciprocal）多项式
  $\deg(P^*) = 3$或4
- 通过粘贴还原出S：$x = 1/x'$，$u = x'^2 u'$

- 这个射影曲面S的一个仿射开集S^o由以下具体的方程定义
- $y^2 - az^2 = P(x)$，其中坐标$(x, y, z) \in \mathbb{A}^3$，
  $a \in K^*$（基域），$P(x) \in K[x]$次数$= 4$.
- 事实上，只要给定一个这样的仿射方程，可以通过粘贴还原出射影模型S：
- $(x, y : z : u) \in (\mathbb{P}^1 \setminus \{\infty\}) \times \mathbb{P}^2$
  $y^2 - az^2 = u^2 P(x)$
- $(x', y : z : u') \in (\mathbb{P}^1 \setminus \{0\}) \times \mathbb{P}^2$
  $y^2 - az^2 = u'^2 P^*(x')$
- 其中$P^*(x') = x'^4 P(1/x')$为$P(x)$的互反（reciprocal）多项式
  $\deg(P^*) = 3$或4
- 通过粘贴还原出S：$x = 1/x'$，$u = x'^2 u'$

- 简记 $S: \quad y^2 - az^2 = P(x)$
- S光滑$\Longleftrightarrow P$是可分多项式（此时P^*自动可分）
- 如果$a \in K^{*2}$，则S双有理等价于$\mathbb{P}^2$。
- 向x坐标投影：$S \to \mathbb{P}^1$是一个圆锥曲线丛，有4根几何纤维是不光滑的（对应多项式的4个零点）。

- 全国数论会议：算术性质如何?

- 简记 $S: \quad y^2 - az^2 = P(x)$
- S光滑$\Longleftrightarrow P$是可分多项式（此时P^*自动可分）
- 如果$a \in K^{*2}$，则S双有理等价于$\mathbb{P}^2$。
- 向x坐标投影：$S \to \mathbb{P}^1$是一个圆锥曲线丛，有4根几何纤维是不光滑的（对应多项式的4个零点）。

- 全国数论会议：算术性质如何?

- 简记 $S: \quad y^2 - az^2 = P(x)$
- S光滑$\Longleftrightarrow P$是可分多项式（此时P^*自动可分）
- 如果$a \in K^{*2}$，则S双有理等价于$\mathbb{P}^2$。
- 向x坐标投影：$S \to \mathbb{P}^1$是一个圆锥曲线丛，有4根几何纤维是不光滑的（对应多项式的4个零点）。
- 全国数论会议：算术性质如何?

- 简记 $S: \quad y^2 - az^2 = P(x)$
- S光滑$\Longleftrightarrow P$是可分多项式（此时P^*自动可分）
- 如果$a \in K^{*2}$，则S双有理等价于$\mathbb{P}^2$。
- 向x坐标投影：$S \to \mathbb{P}^1$是一个圆锥曲线丛，有4根几何纤维是不光滑的（对应多项式的4个零点）。
- 全国数论会议：算术性质如何？

- 简记 $S: \quad y^2 - az^2 = P(x)$
- S光滑$\Longleftrightarrow P$是可分多项式（此时P^*自动可分）
- 如果$a \in K^{*2}$，则S双有理等价于$\mathbb{P}^2$。
- 向x坐标投影：$S \to \mathbb{P}^1$是一个圆锥曲线丛，有4根几何纤维是不光滑的（对应多项式的4个零点）。

- 全国数论会议：算术性质如何?

Châtelet曲面的几何

- 简记 $S: \quad y^2 - az^2 = P(x)$
- S光滑$\Longleftrightarrow P$是可分多项式（此时P^*自动可分）
- 如果$a \in K^{*2}$，则S双有理等价于$\mathbb{P}^2$。
- 向x坐标投影：$S \to \mathbb{P}^1$是一个圆锥曲线丛，有4根几何纤维是不光滑的（对应多项式的4个零点）。

- 全国数论会议：算术性质如何?

Châtelet曲面的算术性质

- 从现在起K是数域
- Hasse–Minkowski：圆锥曲线满足局部整体原则
  $\exists K$-有理点$\Leftrightarrow \forall v \in \Omega \quad \exists K_v$-有理点
- 局部整体原则的反例：$\mathbb{P}^1$上的圆锥曲线丛(Châtelet曲面) (Iskovskikh, 1971)

$$S_{/\mathbb{Q}}: \quad y^2 + z^2 = -(x^2 - 2)(x^2 - 3)$$

（任何数域K上的Châtelet曲面例子：Poonen，2008）

Theorem (Colliot-Thélène–Sansuc–Swinnerton-Dyer, 1987)

数域上的*Châtelet*曲面上有理点的局部整体原则和弱逼近性质由*Brauer*群完全控制：

$$S(K) \subset \overline{S(K)} = S(\mathbf{A}_K)^{\mathrm{Br}} \subset S(\mathbf{A}_K)$$

- 从现在起K是数域
- Hasse–Minkowski：圆锥曲线满足局部整体原则
  $\exists K$-有理点$\Leftrightarrow \forall v \in \Omega \quad \exists K_v$-有理点
- 局部整体原则的反例：$\mathbb{P}^1$上的圆锥曲线丛(Châtelet曲面) (Iskovskikh, 1971)

$$S_{/\mathbb{Q}}: \quad y^2 + z^2 = -(x^2-2)(x^2-3)$$

（任何数域K上的Châtelet曲面例子：Poonen，2008）

Theorem (Colliot-Thélène–Sansuc–Swinnerton-Dyer, 1987)

数域上的*Châtelet*曲面上有理点的局部整体原则和弱逼近性质由*Brauer*群完全控制：

$$S(K) \subset \overline{S(K)} = S(\mathbf{A}_K)^{\mathrm{Br}} \subset S(\mathbf{A}_K)$$

- 从现在起K是数域
- Hasse–Minkowski：圆锥曲线满足局部整体原则
  $\exists K$-有理点$\Leftrightarrow \forall v \in \Omega \quad \exists K_v$-有理点
- 局部整体原则的反例：$\mathbb{P}^1$上的圆锥曲线丛(Châtelet曲面) (Iskovskikh, 1971)

$$S_{/\mathbb{Q}}: \quad y^2 + z^2 = -(x^2 - 2)(x^2 - 3)$$

（任何数域K上的Châtelet曲面例子：Poonen，2008）

Theorem (Colliot-Thélène–Sansuc–Swinnerton-Dyer, 1987)

数域上的*Châtelet*曲面上有理点的局部整体原则和弱逼近性质由*Brauer*群完全控制：

$$S(K) \subset \overline{S(K)} = S(\mathbf{A}_K)^{\mathrm{Br}} \subset S(\mathbf{A}_K)$$

X： K-代数簇

$$X(K) \subset \overline{X(K)} \subset \text{某闭子集} \subset X(\mathbf{A}_K) \neq \varnothing$$

1，对Hasse原则的障碍；2，对弱逼近性质的障碍（射影簇）

- $X(\mathbf{A}_K) \times \mathrm{Br}(X) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ (Brauer–Manin配对)

$$(x_v) \quad , \quad b \quad \mapsto \langle (x_v), b \rangle_{\mathrm{BM}} = \sum_{v \in \Omega} \mathrm{inv}_v(x_v^*(b))$$

- 其中$\mathrm{inv}_v : \mathrm{Br}(K_v) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$是局部不变量（局部类域论）
- $x_v^* : \mathrm{Br}(X) \to \mathrm{Br}(K_v)$由$x_v : \mathrm{Spec}(K_v) \to X$诱导
- 由$0 \to \mathrm{Br}(K) \to \bigoplus_{v \in \Omega} \mathrm{Br}(K_v) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0$可知

$$X(K) \subset X(\mathbf{A}_K)^{\mathrm{Br}} = \{(x_v) | \forall b \in \mathrm{Br}(X) \quad \langle (x_v), b \rangle_{\mathrm{BM}} = 0\}$$

这是一个闭子集，是合适的候选对象

X： K-代数簇

$$X(K) \subset \overline{X(K)} \subset \text{某闭子集} \subset X(\mathbf{A}_K) \neq \varnothing$$

1，对Hasse原则的障碍；2，对弱逼近性质的障碍（射影簇）

$$X(\mathbf{A}_K) \times \mathrm{Br}(X) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \text{ (Brauer–Manin配对)}$$

$$(x_v) \quad , \quad b \quad \mapsto \langle (x_v), b\rangle_{\mathrm{BM}} = \sum_{v\in\Omega} \mathrm{inv}_v(x_v^*(b))$$

- 其中$\mathrm{inv}_v : \mathrm{Br}(K_v) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$是局部不变量（局部类域论）
- $x_v^* : \mathrm{Br}(X) \to \mathrm{Br}(K_v)$由$x_v : \mathrm{Spec}(K_v) \to X$诱导
- 由$0 \to \mathrm{Br}(K) \to \bigoplus_{v\in\Omega} \mathrm{Br}(K_v) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0$可知

$$X(K) \subset X(\mathbf{A}_K)^{\mathrm{Br}} = \{(x_v) | \forall b \in \mathrm{Br}(X) \quad \langle (x_v), b\rangle_{\mathrm{BM}} = 0\}$$

这是一个闭子集，是合适的候选对象

X： K-代数簇

$$X(K) \subset \overline{X(K)} \subset \text{某闭子集} \subset X(\mathbf{A}_K) \neq \varnothing$$

1，对Hasse原则的障碍；2，对弱逼近性质的障碍（射影簇）

$$X(\mathbf{A}_K) \times \mathrm{Br}(X) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \ (\text{Brauer–Manin配对})$$
$$(x_v) \quad , \quad b \quad \mapsto \langle (x_v), b \rangle_{\mathrm{BM}} = \sum_{v \in \Omega} \mathrm{inv}_v(x_v^*(b))$$

- 其中$\mathrm{inv}_v : \mathrm{Br}(K_v) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$是局部不变量（局部类域论）
- $x_v^* : \mathrm{Br}(X) \to \mathrm{Br}(K_v)$由$x_v : \mathrm{Spec}(K_v) \to X$诱导
- 由$0 \to \mathrm{Br}(K) \to \bigoplus_{v \in \Omega} \mathrm{Br}(K_v) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0$可知

$X(K) \subset X(\mathbf{A}_K)^{\mathrm{Br}} = \{(x_v) | \forall b \in \mathrm{Br}(X) \quad \langle (x_v), b \rangle_{\mathrm{BM}} = 0\}$
这是一个闭子集，是合适的候选对象

X： K-代数簇

$$X(K) \subset \overline{X(K)} \subset \text{某闭子集} \subset X(\mathbf{A}_K) \neq \varnothing$$

1，对Hasse原则的障碍；2，对弱逼近性质的障碍（射影簇）

$$X(\mathbf{A}_K) \times \mathrm{Br}(X) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \text{ (Brauer–Manin配对)}$$

$$(x_v) \quad , \quad b \quad \mapsto \langle (x_v), b \rangle_{\mathrm{BM}} = \sum_{v \in \Omega} \mathrm{inv}_v(x_v^*(b))$$

- 其中$\mathrm{inv}_v : \mathrm{Br}(K_v) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$是局部不变量（局部类域论）
- $x_v^* : \mathrm{Br}(X) \to \mathrm{Br}(K_v)$由$x_v : \mathrm{Spec}(K_v) \to X$诱导
- 由$0 \to \mathrm{Br}(K) \to \bigoplus_{v \in \Omega} \mathrm{Br}(K_v) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0$可知

$$X(K) \subset X(\mathbf{A}_K)^{\mathrm{Br}} = \{(x_v) | \forall b \in \mathrm{Br}(X) \quad \langle (x_v), b \rangle_{\mathrm{BM}} = 0\}$$

这是一个闭子集，是合适的候选对象

X： K-代数簇

$$X(K)\subset\overline{X(K)}\subset \text{某闭子集}\subset X(\mathbf{A}_K)\neq\varnothing$$

1，对Hasse原则的障碍；2，对弱逼近性质的障碍（射影簇）

$$X(\mathbf{A}_K)\times \mathrm{Br}(X)\to\mathbb{Q}/\mathbb{Z}\ (\text{Brauer–Manin配对})$$

$$(x_v)\quad,\quad b\quad\mapsto\langle(x_v),b\rangle_{\mathrm{BM}}=\sum_{v\in\Omega}\mathrm{inv}_v(x_v^*(b))$$

- 其中$\mathrm{inv}_v:\mathrm{Br}(K_v)\to\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$是局部不变量（局部类域论）
- $x_v^*:\mathrm{Br}(X)\to\mathrm{Br}(K_v)$由$x_v:\mathrm{Spec}(K_v)\to X$诱导
- 由$0\to\mathrm{Br}(K)\to\bigoplus_{v\in\Omega}\mathrm{Br}(K_v)\to\mathbb{Q}/\mathbb{Z}\to 0$可知

$$X(K)\subset X(\mathbf{A}_K)^{\mathrm{Br}}=\{(x_v)|\forall b\in\mathrm{Br}(X)\quad\langle(x_v),b\rangle_{\mathrm{BM}}=0\}$$

这是一个闭子集，是合适的候选对象

- 其他变种：
  $X(\mathbf{A}_K)^{\mathrm{desc}}$：通过把$\mathrm{H}^2_{\mathrm{et}}(X,\mathbb{G}_m)$替换成$\mathrm{H}^1(X,G)$来定义($G$：线性代数群)
  $X(\mathbf{A}_K)^{\mathrm{et},\mathrm{Br}}$：通过$X$的étale覆盖的Brauer–Manin障碍定义
- 花絮：$X(\mathbf{A}_K)^{\mathrm{desc}} = X(\mathbf{A}_K)^{\mathrm{et},\mathrm{Br}}$(Demarche、Skorobogatov、曹阳、徐飞)

Definition

- Brauer–Manin障碍对Hasse原则是唯一障碍：

$$X(\mathbf{A}_K)^{\mathrm{Br}} = \varnothing \Leftrightarrow X(K) = \varnothing$$

- Brauer–Manin障碍对弱逼近性质是唯一障碍：$\overline{X(K)} = X(\mathbf{A}_K)^{\mathrm{Br}}$ (假设X是射影的)

- 刚才CT–S–SD定理是说Châtelet曲面满足上述定义所陈述的性质。

- 其他变种:
  $X(\mathbf{A}_K)^{\mathrm{desc}}$: 通过把$\mathrm{H}^2_{\mathrm{et}}(X,\mathbb{G}_{\mathrm{m}})$替换成$\mathrm{H}^1(X,G)$来定义($G$: 线性代数群)
  $X(\mathbf{A}_K)^{\mathrm{et,Br}}$: 通过$X$的étale覆盖的Brauer–Manin障碍定义
- 花絮: $X(\mathbf{A}_K)^{\mathrm{desc}}=X(\mathbf{A}_K)^{\mathrm{et,Br}}$(Demarche、Skorobogatov、曹阳、徐飞)

Definition

- Brauer–Manin障碍对Hasse原则是唯一障碍:

$$X(\mathbf{A}_K)^{\mathrm{Br}}=\varnothing\Leftrightarrow X(K)=\varnothing$$

- Brauer–Manin障碍对弱逼近性质是唯一障碍: $\overline{X(K)}=X(\mathbf{A}_K)^{\mathrm{Br}}$ (假设X是射影的)

- 刚才CT–S–SD定理是说Châtelet曲面满足上述定义所陈述的性质。

- 其他变种：
  $X(\mathbf{A}_K)^{\mathrm{desc}}$：通过把$\mathrm{H}^2_{\mathrm{et}}(X,\mathbb{G}_{\mathrm{m}})$替换成$\mathrm{H}^1(X,G)$来定义($G$：线性代数群)
  $X(\mathbf{A}_K)^{\mathrm{et,Br}}$：通过$X$的étale覆盖的Brauer–Manin障碍定义
- 花絮：$X(\mathbf{A}_K)^{\mathrm{desc}} = X(\mathbf{A}_K)^{\mathrm{et,Br}}$(Demarche、Skorobogatov、曹阳、徐飞)

Definition

- Brauer–Manin障碍对Hasse原则是唯一障碍：

$$X(\mathbf{A}_K)^{\mathrm{Br}} = \varnothing \Leftrightarrow X(K) = \varnothing$$

- Brauer–Manin障碍对弱逼近性质是唯一障碍：$\overline{X(K)} = X(\mathbf{A}_K)^{\mathrm{Br}}$ (假设X是射影的)

- 刚才CT–S–SD定理是说Châtelet曲面满足上述定义所陈述的性质。

- 其他变种：
  $X(\mathbf{A}_K)^{\mathrm{desc}}$：通过把$\mathrm{H}^2_{\mathrm{et}}(X,\mathbb{G}_{\mathrm{m}})$替换成$\mathrm{H}^1(X,G)$来定义($G$：线性代数群)
  $X(\mathbf{A}_K)^{\mathrm{et,Br}}$：通过$X$的étale覆盖的Brauer–Manin障碍定义
- 花絮：$X(\mathbf{A}_K)^{\mathrm{desc}} = X(\mathbf{A}_K)^{\mathrm{et,Br}}$(Demarche、Skorobogatov、曹阳、徐飞)

Definition

- Brauer–Manin障碍对Hasse原则是唯一障碍：

$$X(\mathbf{A}_K)^{\mathrm{Br}} = \varnothing \Leftrightarrow X(K) = \varnothing$$

- Brauer–Manin障碍对弱逼近性质是唯一障碍：$\overline{X(K)} = X(\mathbf{A}_K)^{\mathrm{Br}}$ (假设X是射影的)

- 刚才CT–S–SD定理是说Châtelet曲面满足上述定义所陈述的性质。

- 其他变种：
  $X(\mathbf{A}_K)^{\mathrm{desc}}$：通过把$\mathrm{H}^2_{\mathrm{et}}(X,\mathbb{G}_{\mathrm{m}})$替换成$\mathrm{H}^1(X,G)$来定义($G$：线性代数群)
  $X(\mathbf{A}_K)^{\mathrm{et,Br}}$：通过$X$的étale覆盖的Brauer–Manin障碍定义
- 花絮：$X(\mathbf{A}_K)^{\mathrm{desc}}=X(\mathbf{A}_K)^{\mathrm{et,Br}}$(Demarche、Skorobogatov、曹阳、徐飞)

Definition

- Brauer–Manin障碍对Hasse原则是唯一障碍：

$$X(\mathbf{A}_K)^{\mathrm{Br}}=\varnothing \Leftrightarrow X(K)=\varnothing$$

- Brauer–Manin障碍对弱逼近性质是唯一障碍：$\overline{X(K)}=X(\mathbf{A}_K)^{\mathrm{Br}}$ (假设X是射影的)

- 刚才CT–S–SD定理是说Châtelet曲面满足上述定义所陈述的性质。

期盼的结果

Conjecture (Colliot-Thélène–Sansuc)

若X是有理连通代数簇，则*Brauer–Manin*障碍对*Hasse*原则和弱逼近性质是唯一障碍。

Conjecture (Scharaschkin-Skorobogatov，Stoll)

若X是曲线，则*Brauer–Manin*障碍对*Hasse*原则和*(*除去无穷位以外的*)*弱逼近性质是唯一障碍。

- 一些代数簇已被证明成立：1，带有群作用；2，带有纤维丛结构
- 对于椭圆曲线，下文要用到的Stoll猜想等价于Ш群有限

期盼的结果

Conjecture (Colliot-Thélène–Sansuc)

若X是有理连通代数簇，则*Brauer–Manin*障碍对*Hasse*原则和弱逼近性质是唯一障碍。

Conjecture (Scharaschkin-Skorobogatov，Stoll)

若X是曲线，则*Brauer–Manin*障碍对*Hasse*原则和*(*除去无穷位以外的*)*弱逼近性质是唯一障碍。

- 一些代数簇已被证明成立：1，带有群作用；2，带有纤维丛结构
- 对于椭圆曲线，下文要用到的Stoll猜想等价于Ш群有限

Brauer–Manin障碍的失效

- Skorobogatov，1999

  Brauer–Manin障碍不能解释Hasse原则的失效：
  双椭圆曲面——两亏格1的曲线的乘积/有限群作用

- Poonen，2010

  étale Brauer–Manin障碍也不能解释Hasse原则的失效：
  高亏格曲线上的Châtelet曲面丛
  （或秩为0的椭圆曲线上的……）

Brauer–Manin障碍的失效

- Skorobogatov，1999

  Brauer–Manin障碍不能解释Hasse原则的失效：
  双椭圆曲面——两亏格1的曲线的乘积/有限群作用

- Poonen，2010

  étale Brauer–Manin障碍也不能解释Hasse原则的失效：
  高亏格曲线上的Châtelet曲面丛
  （或秩为0的椭圆曲线上的······）

- $\mathbb{P}^1$上的Châtelet曲面丛
  仿射方程：$y^2 - a_t z^2 = P_t(x)$
- 其中$a_t \in K[t]^*$，$P_t(x) \in K[t,x]$且x-次数为4
- 类似地，如果假设（以下讨论基本都会满足这个假设）
  - $a_t \in K^*$是常值
  - P的t-次数为偶数

  从这个方程出发可以给出$V \to \mathbb{P}^1$射影的Châtelet曲面丛

$$\begin{tikzcd}
 & V \arrow[d] \arrow[dd, bend left, "f"] \\
De(V) \arrow[r, hook] \arrow[dr, "\pi"'] & \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"] \\
 & \mathbb{P}^1
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
y^2 - a_t z^2 = P_t(x) \arrow[d, mapsto] \\
(t,x) \arrow[d, mapsto] \\
t
\end{tikzcd}$$

其中$De(V) = \{(t,x) | \text{“}P_t(x) = 0\text{”}\} \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$
- $\theta \in \mathrm{Ram}(\pi) \Leftrightarrow f^{-1}(\theta)$不光滑

- $\mathbb{P}^1$上的Châtelet曲面丛
  仿射方程：$y^2 - a_t z^2 = P_t(x)$
- 其中$a_t \in K[t]^*$，$P_t(x) \in K[t,x]$且x-次数为4
- 类似地，如果假设（以下讨论基本都会满足这个假设）
  - $a_t \in K^*$是常值
  - P的t-次数为偶数

  从这个方程出发可以给出$V \to \mathbb{P}^1$射影的Châtelet曲面丛

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[d] \arrow[dd, bend left, "f"] \\ De(V) \arrow[r, hook] \arrow[dr, "\pi"'] & \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"] \\ & \mathbb{P}^1 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} y^2 - a_t z^2 = P_t(x) \arrow[d, mapsto] \\ (t,x) \arrow[d, mapsto] \\ t \end{tikzcd}$$

  其中$De(V) = \{(t,x) | \text{“}P_t(x) = 0\text{”}\} \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$
- $\theta \in \mathrm{Ram}(\pi) \Leftrightarrow f^{-1}(\theta)$不光滑

- $\mathbb{P}^1$上的Châtelet曲面丛
  仿射方程：$y^2 - a_t z^2 = P_t(x)$
- 其中$a_t \in K[t]^*$，$P_t(x) \in K[t,x]$且x-次数为4
- 类似地，如果假设（以下讨论基本都会满足这个假设）
  - $a_t \in K^*$是常值
  - P的t-次数为偶数

  从这个方程出发可以给出$V \to \mathbb{P}^1$射影的Châtelet曲面丛

$$
\begin{tikzcd}
 & V \arrow[d] \arrow[dd, bend left, "f"] \\
De(V) \arrow[r, hookrightarrow] \arrow[dr, "\pi"'] & \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"] \\
 & \mathbb{P}^1
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{array}{c}
y^2 - a_t z^2 = P_t(x) \\
\downarrow \\
(t,x) \\
\downarrow \\
t
\end{array}
$$

其中$De(V) = \{(t,x) | \text{“}P_t(x) = 0\text{”}\} \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$

- $\theta \in \mathrm{Ram}(\pi) \Leftrightarrow f^{-1}(\theta)$不光滑

- $\mathbb{P}^1$上的Châtelet曲面丛
  仿射方程：$y^2 - a_t z^2 = P_t(x)$
- 其中$a_t \in K[t]^*$，$P_t(x) \in K[t,x]$且x-次数为4
- 类似地，如果假设（以下讨论基本都会满足这个假设）
  - $a_t \in K^*$是常值
  - P的t-次数为偶数

  从这个方程出发可以给出$V \to \mathbb{P}^1$射影的Châtelet曲面丛

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[d] \arrow[dd, bend left, "f"] \\ De(V) \arrow[r, hook] \arrow[dr, "\pi"'] & \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"] \\ & \mathbb{P}^1 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} y^2 - a_t z^2 = P_t(x) \arrow[d, mapsto] \\ (t,x) \arrow[d, mapsto] \\ t \end{tikzcd}$$

其中$De(V) = \{(t,x) | \text{“}P_t(x) = 0\text{”}\} \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$

- $\theta \in \mathrm{Ram}(\pi) \Leftrightarrow f^{-1}(\theta)$不光滑

Châtelet曲面丛

- $\mathbb{P}^1$上的Châtelet曲面丛
  仿射方程： $y^2 - a_t z^2 = P_t(x)$
- 其中$a_t \in K[t]^*$， $P_t(x) \in K[t,x]$且x-次数为4
- 类似地，如果假设（以下讨论基本都会满足这个假设）
  - $a_t \in K^*$是常值
  - P的t-次数为偶数

  从这个方程出发可以给出$V \to \mathbb{P}^1$射影的Châtelet曲面丛

$$
\begin{tikzcd}
 & V \arrow[d] \arrow[dd, bend left, "f"] \\
De(V) \arrow[r, hook] \arrow[dr, "\pi"'] & \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"] \\
 & \mathbb{P}^1
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
y^2 - a_t z^2 = P_t(x) \arrow[d, mapsto] \\
(t, x) \arrow[d, mapsto] \\
t
\end{tikzcd}
$$

  其中$De(V) = \{(t,x) | \text{“}P_t(x) = 0\text{”}\} \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$
- $\theta \in \mathrm{Ram}(\pi) \Leftrightarrow f^{-1}(\theta)$不光滑

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dd, bend left, "F"] & V \arrow[d] \arrow[dd, bend left, "f"] \\
C \times \mathbb{P}^1 \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{pr}"] & \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"] \\
C \arrow[r, "\gamma"] & \mathbb{P}^1
\end{tikzcd}$$

几个关键点:

1. $\varnothing \neq C(K) < \infty$ 且$\gamma(C(K)) = \{\infty\} \subset \mathbb{P}^1$
2. $\mathrm{Ram}(\gamma) \cap \mathrm{Ram}(\pi : De(V) \to \mathbb{P}^1) = \varnothing (\Rightarrow X$光滑$)$
3. $De(V)$光滑$+(2) \Rightarrow \mathrm{Br}(C) \to \mathrm{Br}(X)$满射
4. $(1) \Rightarrow \forall \Theta' \in C(K), X_{\Theta'} \simeq V_\infty$
5. 只要取合适的V_∞(即取合适的$a \in K^*$和$P_\infty(x) \in K[x]$，类域论凑系数)使得 $\varnothing = V_\infty(K) = V_\infty(\mathbf{A}_K)^{\mathrm{Br}} \subsetneq V_\infty(\mathbf{A}_K)$
6. $(4)+(5) \Rightarrow X(K) = \varnothing$
7. $(3)+(5) \Rightarrow X(\mathbf{A}_K)^{\mathrm{Br}} \neq \varnothing$
8. 取定V_∞后取适当的V_0可以使$De(V)$光滑

Poonen的构造

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dd, bend left, "F"] & V \arrow[d] \arrow[dd, bend left, "f"] \\
C \times \mathbb{P}^1 \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{pr}"] & \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"] \\
C \arrow[r, "\gamma"] & \mathbb{P}^1
\end{tikzcd}$$

几个关键点:

1. $\varnothing \neq C(K) < \infty$ 且$\gamma(C(K)) = \{\infty\} \subset \mathbb{P}^1$
2. $\mathrm{Ram}(\gamma) \cap \mathrm{Ram}(\pi : De(V) \to \mathbb{P}^1) = \varnothing (\Rightarrow X$光滑$)$
3. $De(V)$光滑+(2)$\Rightarrow \mathrm{Br}(C) \to \mathrm{Br}(X)$满射
4. $(1) \Rightarrow \forall \Theta' \in C(K), X_{\Theta'} \simeq V_\infty$
5. 只要取合适的V_∞(即取合适的$a \in K^*$和$P_\infty(x) \in K[x]$，类域论凑系数)使得 $\varnothing = V_\infty(K) = V_\infty(\mathbf{A}_K)^{\mathrm{Br}} \subsetneq V_\infty(\mathbf{A}_K)$
6. (4)+(5)$\Rightarrow X(K) = \varnothing$
7. (3)+(5)$\Rightarrow X(\mathbf{A}_K)^{\mathrm{Br}} \neq \varnothing$
8. 取定V_∞后取适当的V_0可以使$De(V)$光滑

几个关键点:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dd, bend left, "F"] & V \arrow[d] \arrow[dd, bend left, "f"] \\
C \times \mathbb{P}^1 \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{pr}"] & \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"] \\
C \arrow[r, "\gamma"] & \mathbb{P}^1
\end{tikzcd}$$

1. $\varnothing \neq C(K) < \infty$ 且$\gamma(C(K)) = \{\infty\} \subset \mathbb{P}^1$
2. $\mathrm{Ram}(\gamma) \cap \mathrm{Ram}(\pi : De(V) \to \mathbb{P}^1) = \varnothing (\Rightarrow X$光滑$)$
3. $De(V)$光滑+(2)$\Rightarrow \mathrm{Br}(C) \to \mathrm{Br}(X)$满射
4. (1)$\Rightarrow \forall \Theta' \in C(K), X_{\Theta'} \simeq V_\infty$
5. 只要取合适的V_∞(即取合适的$a \in K^*$和$P_\infty(x) \in K[x]$，类域论凑系数)使得 $\varnothing = V_\infty(K) = V_\infty(\mathbf{A}_K)^{\mathrm{Br}} \subsetneq V_\infty(\mathbf{A}_K)$
6. (4)+(5)$\Rightarrow X(K) = \varnothing$
7. (3)+(5)$\Rightarrow X(\mathbf{A}_K)^{\mathrm{Br}} \neq \varnothing$
8. 取定V_∞后取适当的V_0可以使$De(V)$光滑

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dd, bend left, "F"] & V \arrow[d] \arrow[dd, bend left, "f"] \\
C \times \mathbb{P}^1 \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{pr}"] & \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"] \\
C \arrow[r, "\gamma"] & \mathbb{P}^1
\end{tikzcd}$$

几个关键点:

1. $\varnothing \neq C(K) < \infty$ 且$\gamma(C(K)) = \{\infty\} \subset \mathbb{P}^1$
2. $\mathrm{Ram}(\gamma) \cap \mathrm{Ram}(\pi : De(V) \to \mathbb{P}^1) = \varnothing (\Rightarrow X$光滑$)$
3. $De(V)$光滑$+(2) \Rightarrow \mathrm{Br}(C) \to \mathrm{Br}(X)$满射
4. $(1) \Rightarrow \forall \Theta' \in C(K), X_{\Theta'} \simeq V_\infty$
5. 只要取合适的V_∞(即取合适的$a \in K^*$和$P_\infty(x) \in K[x]$，类域论凑系数)使得 $\varnothing = V_\infty(K) = V_\infty(\mathbf{A}_K)^{\mathrm{Br}} \subsetneq V_\infty(\mathbf{A}_K)$
6. $(4)+(5) \Rightarrow X(K) = \varnothing$
7. $(3)+(5) \Rightarrow X(\mathbf{A}_K)^{\mathrm{Br}} \neq \varnothing$
8. 取定V_∞后取适当的V_0可以使$De(V)$光滑

Poonen的构造

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dd, bend left, "F"] & V \arrow[d] \arrow[dd, bend left, "f"] \\
C \times \mathbb{P}^1 \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{pr}"] & \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"] \\
C \arrow[r, "\gamma"] & \mathbb{P}^1
\end{tikzcd}$$

几个关键点:

1. $\varnothing \neq C(K) < \infty$ 且$\gamma(C(K)) = \{\infty\} \subset \mathbb{P}^1$
2. $\mathrm{Ram}(\gamma) \cap \mathrm{Ram}(\pi : De(V) \to \mathbb{P}^1) = \varnothing (\Rightarrow X$光滑$)$
3. $De(V)$光滑$+(2) \Rightarrow \mathrm{Br}(C) \to \mathrm{Br}(X)$满射
4. $(1) \Rightarrow \forall \Theta' \in C(K), X_{\Theta'} \simeq V_\infty$
5. 只要取合适的V_∞(即取合适的$a \in K^*$和$P_\infty(x) \in K[x]$，类域论凑系数)使得 $\varnothing = V_\infty(K) = V_\infty(\mathbf{A}_K)^{\mathrm{Br}} \subsetneq V_\infty(\mathbf{A}_K)$
6. $(4)+(5) \Rightarrow X(K) = \varnothing$
7. $(3)+(5) \Rightarrow X(\mathbf{A}_K)^{\mathrm{Br}} \neq \varnothing$
8. 取定V_∞后取适当的V_0可以使$De(V)$光滑

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dd, bend left, "F"] & V \arrow[d] \arrow[dd, bend left, "f"] \\
C \times \mathbb{P}^1 \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{pr}"] & \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"] \\
C \arrow[r, "\gamma"] & \mathbb{P}^1
\end{tikzcd}$$

几个关键点:

1. $\varnothing \neq C(K) < \infty$ 且$\gamma(C(K)) = \{\infty\} \subset \mathbb{P}^1$
2. $\mathrm{Ram}(\gamma) \cap \mathrm{Ram}(\pi : De(V) \to \mathbb{P}^1) = \varnothing(\Rightarrow X$光滑$)$
3. $De(V)$光滑+(2)$\Rightarrow$ $\mathrm{Br}(C) \to \mathrm{Br}(X)$满射
4. (1)$\Rightarrow$ $\forall \Theta' \in C(K), X_{\Theta'} \simeq V_\infty$
5. 只要取合适的V_∞(即取合适的$a \in K^*$和$P_\infty(x) \in K[x]$，类域论凑系数)使得 $\varnothing = V_\infty(K) = V_\infty(\mathbf{A}_K)^{\mathrm{Br}} \subsetneq V_\infty(\mathbf{A}_K)$
6. (4)+(5)$\Rightarrow$ $X(K) = \varnothing$
7. (3)+(5)$\Rightarrow$ $X(\mathbf{A}_K)^{\mathrm{Br}} \neq \varnothing$
8. 取定V_∞后取适当的V_0可以使$De(V)$光滑

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dd, bend left, "F"] & V \arrow[d] \arrow[dd, bend left, "f"] \\ C \times \mathbb{P}^1 \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{pr}"] & \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"] \\ C \arrow[r, "\gamma"] & \mathbb{P}^1 \end{tikzcd}$$

几个关键点:

1. $\varnothing \neq C(K) < \infty$ 且$\gamma(C(K)) = \{\infty\} \subset \mathbb{P}^1$
2. $\mathrm{Ram}(\gamma) \cap \mathrm{Ram}(\pi : De(V) \to \mathbb{P}^1) = \varnothing (\Rightarrow X$光滑)
3. $De(V)$光滑+(2)$\Rightarrow \mathrm{Br}(C) \to \mathrm{Br}(X)$满射
4. (1)$\Rightarrow \forall \Theta' \in C(K), X_{\Theta'} \simeq V_\infty$
5. 只要取合适的V_∞(即取合适的$a \in K^*$和$P_\infty(x) \in K[x]$, 类域论凑系数)使得 $\varnothing = V_\infty(K) = V_\infty(\mathbf{A}_K)^{\mathrm{Br}} \subsetneq V_\infty(\mathbf{A}_K)$
6. (4)+(5)$\Rightarrow X(K) = \varnothing$
7. (3)+(5)$\Rightarrow X(\mathbf{A}_K)^{\mathrm{Br}} \neq \varnothing$
8. 取定V_∞后取适当的V_0可以使$De(V)$光滑

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dd, bend left, "F"] & V \arrow[d] \arrow[dd, bend left, "f"] \\
C \times \mathbb{P}^1 \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{pr}"] & \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"] \\
C \arrow[r, "\gamma"] & \mathbb{P}^1
\end{tikzcd}$$

几个关键点:

1. $\varnothing \neq C(K) < \infty$ 且$\gamma(C(K)) = \{\infty\} \subset \mathbb{P}^1$
2. $\mathrm{Ram}(\gamma) \cap \mathrm{Ram}(\pi : De(V) \to \mathbb{P}^1) = \varnothing (\Rightarrow X$光滑$)$
3. $De(V)$光滑$+(2) \Rightarrow \mathrm{Br}(C) \to \mathrm{Br}(X)$满射
4. $(1) \Rightarrow \forall \Theta' \in C(K), X_{\Theta'} \simeq V_\infty$
5. 只要取合适的V_∞(即取合适的$a \in K^*$和$P_\infty(x) \in K[x]$, 类域论凑系数)使得 $\varnothing = V_\infty(K) = V_\infty(\mathbf{A}_K)^{\mathrm{Br}} \subsetneq V_\infty(\mathbf{A}_K)$
6. $(4)+(5) \Rightarrow X(K) = \varnothing$
7. $(3)+(5) \Rightarrow X(\mathbf{A}_K)^{\mathrm{Br}} \neq \varnothing$
8. 取定V_∞后取适当的V_0可以使$De(V)$光滑

小结

Theorem (Poonen, 2010)

对任何数域K，存在*Châtelet*曲面丛X违反了*Hasse*原则（更不满足弱逼近性质），而且*(étale)Brauer–Manin*障碍不是唯一障碍。

- 方法：从$\mathbb{P}^1$上的Châtelet曲面丛拉回到曲线上，归结为一根纤维（V_∞）的算术性质

Question

基域扩张L/K后代数簇的算术性质（*Hasse*原则、弱逼近性质、*Brauer–Manin*障碍）是否会改变?

- 特别地，Poonen的Châtelet曲面丛呢?

小结

Theorem (Poonen, 2010)

对任何数域K，存在*Châtelet*曲面丛X违反了*Hasse*原则（更不满足弱逼近性质），而且*(étale)Brauer–Manin*障碍不是唯一障碍。

- 方法：从$\mathbb{P}^1$上的Châtelet曲面丛拉回到曲线上，归结为一根纤维（V_∞）的算术性质

Question

基域扩张L/K后代数簇的算术性质（*Hasse*原则、弱逼近性质、*Brauer–Manin*障碍）是否会改变?

- 特别地，Poonen的Châtelet曲面丛呢?

小结

Theorem (Poonen, 2010)

对任何数域K，存在*Châtelet*曲面丛X违反了*Hasse*原则（更不满足弱逼近性质），而且*(étale)Brauer–Manin*障碍不是唯一障碍。

- 方法：从$\mathbb{P}^1$上的Châtelet曲面丛拉回到曲线上，归结为一根纤维（V_∞）的算术性质

Question

基域扩张L/K后代数簇的算术性质（*Hasse*原则、弱逼近性质、*Brauer–Manin*障碍）是否会改变?

- 特别地，Poonen的Châtelet曲面丛呢?

Theorem (吴晗，2020)

假设Stoll猜想成立。给定L/K满足以下两条之一，

- L拥有实位
- $[L:K]$是奇数

则存在Châtelet曲面丛X使得

- X_K和X_L均违反Hasse原则，
- X_K上Brauer–Manin障碍是唯一障碍，
- X_L上Brauer–Manin障碍不是唯一障碍。

- 弱逼近性质有类似结果，而且对L/K无限制

Theorem (吴晗，2020)

假设Stoll猜想成立。给定L/K满足以下两条之一，

- L拥有实位
- $[L:K]$是奇数

则存在*Châtelet*曲面丛X使得

- X_K和X_L均违反*Hasse*原则，
- X_K上*Brauer–Manin*障碍是唯一障碍，
- X_L上*Brauer–Manin*障碍不是唯一障碍。

- 弱逼近性质有类似结果，而且对L/K无限制

几个关键点：
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "F"] & V \arrow[d, "f"] \\ C \arrow[r, "\gamma"] & \mathbb{P}^1 \end{tikzcd}$$

- $\ldots \Rightarrow X$光滑，$\mathrm{Br}(C) \to \mathrm{Br}(X)$满射（同之前）
- $\varnothing \neq C(K) \subsetneq C(L) < \infty$，$\gamma(C(K)) = \{0\}$，$\gamma(C(L) \setminus C(K)) = \{\infty\}$
- $\forall \Theta' \in C(K), X_{\Theta'} = V_0$，$\forall \Theta' \in C(L) \setminus C(K), X_{\Theta'} = V_\infty \otimes_K L$
- 取合适的$V_{\infty/K}$且$\varnothing = V_{\infty L}(\mathbf{A}_L)^{\mathrm{Br}} \subsetneq V_{\infty L}(\mathbf{A}_L)$(需$2 \nmid [L:K]$) ($\Rightarrow X$在$L$上违反Hasse原则且BM障碍不是唯一障碍)
- 取V_0使$\forall v \neq v_0, V_0(K_v) \neq \varnothing (\Rightarrow X(K_v) \neq \varnothing)$但$V_0(K_{v_0}) = \varnothing$其中有限位$v_0$在$L/K$上完全分裂$(\Rightarrow K_{v_0} = L_{w_0}, X(K_{v_0}) \neq \varnothing)$
- $X(\mathbf{A}_K)^{\mathrm{Br}} = \varnothing$。$(x_v) \perp \mathrm{Br}(X) \Rightarrow F(x_v) \perp \mathrm{Br}(C)$，Stoll猜想(及$C(K) < \infty$)：在有限位上$F(x_v)$必是一个$K$-有理点，矛盾($K$-点上的纤维总是缺少$K_{v_0}$-点)

几个关键点：

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "F"] & V \arrow[d, "f"] \\ C \arrow[r, "\gamma"] & \mathbb{P}^1 \end{tikzcd}$$

- $\ldots \Rightarrow X$光滑，$\mathrm{Br}(C) \to \mathrm{Br}(X)$满射（同之前）
- $\varnothing \neq C(K) \subsetneq C(L) < \infty$，
  $\gamma(C(K)) = \{0\}$，$\gamma(C(L) \setminus C(K)) = \{\infty\}$
- $\forall \Theta' \in C(K), X_{\Theta'} = V_0$，$\forall \Theta' \in C(L) \setminus C(K), X_{\Theta'} = V_\infty \otimes_K L$
- 取合适的$V_{\infty/K}$且$\varnothing = V_{\infty L}(\mathbf{A}_L)^{\mathrm{Br}} \subsetneq V_{\infty L}(\mathbf{A}_L)$(需$2 \nmid [L:K]$)
  ($\Rightarrow X$在L上违反Hasse原则且BM障碍不是唯一障碍)
- 取V_0使$\forall v \neq v_0, V_0(K_v) \neq \varnothing$($\Rightarrow X(K_v) \neq \varnothing$)但$V_0(K_{v_0}) = \varnothing$
  其中有限位v_0在L/K上完全分裂($\Rightarrow K_{v_0} = L_{w_0}, X(K_{v_0}) \neq \varnothing$)
- $X(\mathbf{A}_K)^{\mathrm{Br}} = \varnothing$。 $(x_v) \perp \mathrm{Br}(X) \Rightarrow F(x_v) \perp \mathrm{Br}(C)$，Stoll猜想(及$C(K) < \infty$)：在有限位上$F(x_v)$必是一个$K$-有理点，矛盾($K$-点上的纤维总是缺少$K_{v_0}$-点)

几个关键点：
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "F"] & V \arrow[d, "f"] \\ C \arrow[r, "\gamma"] & \mathbb{P}^1 \end{tikzcd}$$

- $\ldots \Rightarrow X$光滑，$\mathrm{Br}(C) \to \mathrm{Br}(X)$满射（同之前）
- $\varnothing \neq C(K) \subsetneq C(L) < \infty$，
  $\gamma(C(K)) = \{0\}$，$\gamma(C(L) \setminus C(K)) = \{\infty\}$
- $\forall \Theta' \in C(K), X_{\Theta'} = V_0$，$\forall \Theta' \in C(L) \setminus C(K), X_{\Theta'} = V_\infty \otimes_K L$
- 取合适的$V_{\infty/K}$且$\varnothing = V_{\infty L}(\mathbf{A}_L)^{\mathrm{Br}} \subsetneq V_{\infty L}(\mathbf{A}_L)$(需$2 \nmid [L:K]$)
  ($\Rightarrow X$在L上违反Hasse原则且BM障碍不是唯一障碍)
- 取V_0使$\forall v \neq v_0, V_0(K_v) \neq \varnothing (\Rightarrow X(K_v) \neq \varnothing)$但$V_0(K_{v_0}) = \varnothing$
  其中有限位v_0在L/K上完全分裂$(\Rightarrow K_{v_0} = L_{w_0}, X(K_{v_0}) \neq \varnothing)$
- $X(\mathbf{A}_K)^{\mathrm{Br}} = \varnothing$。$(x_v) \perp \mathrm{Br}(X) \Rightarrow F(x_v) \perp \mathrm{Br}(C)$，Stoll猜想(及$C(K) < \infty$)：在有限位上$F(x_v)$必是一个$K$-有理点，矛盾($K$-点上的纤维总是缺少$K_{v_0}$-点)

几个关键点：

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "F"] & V \arrow[d, "f"] \\ C \arrow[r, "\gamma"] & \mathbb{P}^1 \end{tikzcd}$$

- $\ldots \Rightarrow X$光滑，$\mathrm{Br}(C) \to \mathrm{Br}(X)$满射（同之前）
- $\varnothing \neq C(K) \subsetneq C(L) < \infty$，
  $\gamma(C(K)) = \{0\}$，$\gamma(C(L) \setminus C(K)) = \{\infty\}$
- $\forall \Theta' \in C(K), X_{\Theta'} = V_0$，$\forall \Theta' \in C(L) \setminus C(K), X_{\Theta'} = V_\infty \otimes_K L$
- 取合适的$V_{\infty/K}$且$\varnothing = V_{\infty L}(\mathbf{A}_L)^{\mathrm{Br}} \subsetneq V_{\infty L}(\mathbf{A}_L)$(需$2 \nmid [L:K]$)
  $(\Rightarrow X$在L上违反Hasse原则且BM障碍不是唯一障碍)
- 取V_0使$\forall v \neq v_0, V_0(K_v) \neq \varnothing (\Rightarrow X(K_v) \neq \varnothing)$但$V_0(K_{v_0}) = \varnothing$
  其中有限位v_0在L/K上完全分裂$(\Rightarrow K_{v_0} = L_{w_0}, X(K_{v_0}) \neq \varnothing)$
- $X(\mathbf{A}_K)^{\mathrm{Br}} = \varnothing$。$(x_v) \perp \mathrm{Br}(X) \Rightarrow F(x_v) \perp \mathrm{Br}(C)$，Stoll猜想(及$C(K) < \infty$)：在有限位上$F(x_v)$必是一个$K$-有理点，矛盾($K$-点上的纤维总是缺少$K_{v_0}$-点)

几个关键点：
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "F"] & V \arrow[d, "f"] \\ C \arrow[r, "\gamma"] & \mathbb{P}^1 \end{tikzcd}$$

- $\ldots \Rightarrow X$光滑，$\mathrm{Br}(C) \to \mathrm{Br}(X)$满射（同之前）
- $\varnothing \neq C(K) \subsetneq C(L) < \infty$，
  $\gamma(C(K)) = \{0\}$，$\gamma(C(L) \setminus C(K)) = \{\infty\}$
- $\forall \Theta' \in C(K), X_{\Theta'} = V_0$，$\forall \Theta' \in C(L) \setminus C(K), X_{\Theta'} = V_\infty \otimes_K L$
- 取合适的$V_{\infty/K}$且$\varnothing = V_{\infty L}(\mathbf{A}_L)^{\mathrm{Br}} \subsetneq V_{\infty L}(\mathbf{A}_L)$(需$2 \nmid [L:K]$)
  ($\Rightarrow X$在L上违反Hasse原则且BM障碍不是唯一障碍)
- 取V_0使$\forall v \neq v_0, V_0(K_v) \neq \varnothing$($\Rightarrow X(K_v) \neq \varnothing$)但$V_0(K_{v_0}) = \varnothing$
  其中**有限位**v_0在L/K上完全分裂($\Rightarrow K_{v_0} = L_{w_0}, X(K_{v_0}) \neq \varnothing$)
- $X(\mathbf{A}_K)^{\mathrm{Br}} = \varnothing$。$(x_v) \perp \mathrm{Br}(X) \Rightarrow F(x_v) \perp \mathrm{Br}(C)$，Stoll猜想(及$C(K) < \infty$)：在有限位上$F(x_v)$必是一个$K$-有理点，矛盾($K$-点上的纤维总是缺少$K_{v_0}$-点)

几个关键点：

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "F"] & V \arrow[d, "f"] \\ C \arrow[r, "\gamma"] & \mathbb{P}^1 \end{tikzcd}$$

- $\ldots \Rightarrow X$光滑，$\mathrm{Br}(C) \to \mathrm{Br}(X)$满射（同之前）
- $\varnothing \neq C(K) \subsetneq C(L) < \infty$，
  $\gamma(C(K)) = \{0\}$，$\gamma(C(L) \setminus C(K)) = \{\infty\}$
- $\forall \Theta' \in C(K), X_{\Theta'} = V_0$，$\forall \Theta' \in C(L) \setminus C(K), X_{\Theta'} = V_\infty \otimes_K L$
- 取合适的$V_{\infty/K}$且$\varnothing = V_{\infty L}(\mathbf{A}_L)^{\mathrm{Br}} \subsetneq V_{\infty L}(\mathbf{A}_L)$(需$2 \nmid [L:K]$)
  ($\Rightarrow X$在L上违反Hasse原则且BM障碍不是唯一障碍)
- 取V_0使$\forall v \neq v_0, V_0(K_v) \neq \varnothing (\Rightarrow X(K_v) \neq \varnothing)$但$V_0(K_{v_0}) = \varnothing$
  其中**有限位**v_0在L/K上完全分裂$(\Rightarrow K_{v_0} = L_{w_0}, X(K_{v_0}) \neq \varnothing)$
- $X(\mathbf{A}_K)^{\mathrm{Br}} = \varnothing$。$(x_v) \perp \mathrm{Br}(X) \Rightarrow F(x_v) \perp \mathrm{Br}(C)$，Stoll猜想(及$C(K) < \infty$)：在有限位上$F(x_v)$必是一个$K$-有理点，矛盾($K$-点上的纤维总是缺少$K_{v_0}$-点)

小结

- 关注了两根特殊纤维V_0和V_∞
- 缺点：V_∞是K-代数簇，但我们仅仅需要它在L上的性质，$\mathrm{Br}(V_\infty)/\mathrm{Br}(K) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$一旦基变换到偶数次扩张$L$上Brauer–Manin配对会消失。
- 先造好Châtelet曲面丛$V \to \mathbb{P}^1$再寻找合适的$\gamma : C \to \mathbb{P}^1$作拉回往往较难改进这个缺点：拉回后纤维的基域常发生变化
- （吴晗）例外：$L/K = \mathbb{Q}(\sqrt{-1})/\mathbb{Q}$偶数次扩张而且无实位，但仍有具体例子。
- “例外构造”的关键：相关的纤维定义在一对共轭的L-点上，而不可定义在K上。
- 问题：是否可以统一处理这些情况?

小结

- 关注了两根特殊纤维V_0和V_∞
- 缺点：V_∞是K-代数簇，但我们仅仅需要它在L上的性质，$\mathrm{Br}(V_\infty)/\mathrm{Br}(K) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$一旦基变换到偶数次扩张$L$上Brauer–Manin配对会消失。
- 先造好Châtelet曲面丛$V \to \mathbb{P}^1$再寻找合适的$\gamma : C \to \mathbb{P}^1$作拉回往往较难改进这个缺点：拉回后纤维的基域常发生变化
- （吴晗）例外：$L/K = \mathbb{Q}(\sqrt{-1})/\mathbb{Q}$偶数次扩张而且无实位，但仍有具体例子。
- “例外构造”的关键：相关的纤维定义在一对共轭的L-点上，而不可定义在K上。
- 问题：是否可以统一处理这些情况？

小结

- 关注了两根特殊纤维V_0和V_∞
- 缺点：V_∞是K-代数簇，但我们仅仅需要它在L上的性质，$\mathrm{Br}(V_\infty)/\mathrm{Br}(K) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$一旦基变换到偶数次扩张$L$上Brauer–Manin配对会消失。
- 先造好Châtelet曲面丛$V \to \mathbb{P}^1$再寻找合适的$\gamma : C \to \mathbb{P}^1$作拉回往往较难改进这个缺点：拉回后纤维的基域常发生变化
- （吴晗）例外：$L/K = \mathbb{Q}(\sqrt{-1})/\mathbb{Q}$偶数次扩张而且无实位，但仍有具体例子。
- “例外构造”的关键：相关的纤维定义在一对共轭的L-点上，而不可定义在K上。
- 问题：是否可以统一处理这些情况?

小结

- 关注了两根特殊纤维V_0和V_∞
- 缺点：V_∞是K-代数簇，但我们仅仅需要它在L上的性质，$\mathrm{Br}(V_\infty)/\mathrm{Br}(K) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$一旦基变换到偶数次扩张$L$上Brauer–Manin配对会消失。
- 先造好Châtelet曲面丛$V \to \mathbb{P}^1$再寻找合适的$\gamma : C \to \mathbb{P}^1$作拉回往往较难改进这个缺点：拉回后纤维的基域常发生变化
- （吴晗）例外：$L/K = \mathbb{Q}(\sqrt{-1})/\mathbb{Q}$偶数次扩张而且无实位，但仍有具体例子。
- “例外构造”的关键：相关的纤维定义在一对共轭的L-点上，而不可定义在K上。
- 问题：是否可以统一处理这些情况？

小结

- 关注了两根特殊纤维V_0和V_∞
- 缺点：V_∞是K-代数簇，但我们仅仅需要它在L上的性质，$\mathrm{Br}(V_\infty)/\mathrm{Br}(K) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$一旦基变换到偶数次扩张$L$上Brauer–Manin配对会消失。
- 先造好Châtelet曲面丛$V \to \mathbb{P}^1$再寻找合适的$\gamma : C \to \mathbb{P}^1$作拉回往往较难改进这个缺点：拉回后纤维的基域常发生变化
- （吴晗）例外：$L/K = \mathbb{Q}(\sqrt{-1})/\mathbb{Q}$偶数次扩张而且无实位，但仍有具体例子。
- “例外构造”的关键：相关的纤维定义在一对共轭的L-点上，而不可定义在K上。
- 问题：是否可以统一处理这些情况?

小结

- 关注了两根特殊纤维V_0和V_∞
- 缺点：V_∞是K-代数簇，但我们仅仅需要它在L上的性质，$\mathrm{Br}(V_\infty)/\mathrm{Br}(K) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$一旦基变换到偶数次扩张$L$上Brauer–Manin配对会消失。
- 先造好Châtelet曲面丛$V \to \mathbb{P}^1$再寻找合适的$\gamma : C \to \mathbb{P}^1$作拉回往往较难改进这个缺点：拉回后纤维的基域常发生变化
- （吴晗）例外：$L/K = \mathbb{Q}(\sqrt{-1})/\mathbb{Q}$偶数次扩张而且无实位，但仍有具体例子。
- “例外构造”的关键：相关的纤维定义在一对共轭的L-点上，而不可定义在K上。
- 问题：是否可以统一处理这些情况?

主定理

Theorem (欢迎围观 - arXiv:2106.10643)

假设*Stoll*猜想成立。任给定有限扩张L/K，存在*Châtelet*曲面丛X使得

- X_K和X_L均违反*Hasse*原则，
- X_K上*Brauer–Manin*障碍是唯一障碍，
- X_L上*Brauer–Manin*障碍不是唯一障碍。

Poonen构造v3——Lagrange插值在纤维丛上的应用

- 策略：先给定$\gamma : C \to \mathbb{P}^1$，看好$C(K)$、$C(L)$在$\mathbb{P}^1$中的落点之后按算术性质的需求安排特定的Châtelet曲面在需要的点上出现成为纤维。
- 如何安排?
- Lagrange插值：给定有限个K-点x_i，任给值$a_i \in K$，寻找多项式$P(x) \in K[x]$使得$P(x_i) = a_i$
- 插"代数簇"：给定$\mathbb{P}^1$上有限个（闭）点θ_i，任给代数簇V_i，寻找纤维丛$V \to \mathbb{P}^1$使得纤维$V_{\theta_i} \simeq V_i$
- (与之前对比)同时关注了任意数目的特殊纤维。

- 策略：先给定$\gamma : C \to \mathbb{P}^1$，看好$C(K)$、$C(L)$在$\mathbb{P}^1$中的落点之后按算术性质的需求安排特定的Châtelet曲面在需要的点上出现成为纤维。
- 如何安排?
- Lagrange插值：给定有限个K-点x_i，任给值$a_i \in K$，寻找多项式$P(x) \in K[x]$使得$P(x_i) = a_i$
- 插"代数簇"：给定$\mathbb{P}^1$上有限个（闭）点θ_i，任给代数簇V_i，寻找纤维丛$V \to \mathbb{P}^1$使得纤维$V_{\theta_i} \simeq V_i$
- (与之前对比)同时关注了任意数目的特殊纤维。

- 策略：先给定$\gamma : C \to \mathbb{P}^1$，看好$C(K)$、$C(L)$在$\mathbb{P}^1$中的落点之后按算术性质的需求安排特定的Châtelet曲面在需要的点上出现成为纤维。
- 如何安排?
- Lagrange插值：给定有限个K-点x_i，任给值$a_i \in K$，寻找多项式$P(x) \in K[x]$使得$P(x_i) = a_i$
- 插“代数簇”：给定$\mathbb{P}^1$上有限个（闭）点θ_i，任给代数簇V_i，寻找纤维丛$V \to \mathbb{P}^1$使得纤维$V_{\theta_i} \simeq V_i$
- (与之前对比)同时关注了任意数目的特殊纤维。

- 策略：先给定$\gamma : C \to \mathbb{P}^1$，看好$C(K)$、$C(L)$在$\mathbb{P}^1$中的落点之后按算术性质的需求安排特定的Châtelet曲面在需要的点上出现成为纤维。
- 如何安排?
- Lagrange插值：给定有限个K-点x_i，任给值$a_i \in K$，寻找多项式$P(x) \in K[x]$使得$P(x_i) = a_i$
- 插"代数簇"：给定$\mathbb{P}^1$上有限个（闭）点θ_i，任给代数簇V_i，寻找纤维丛$V \to \mathbb{P}^1$使得纤维$V_{\theta_i} \simeq V_i$
- (与之前对比)同时关注了任意数目的特殊纤维。

Proposition (证明主定理的关键步骤)

给定$\mathbb{A}^1$中的有限个闭点θ_i，令$K_i = K(\theta_i)$为相应的剩余类域。任给定定义在K_i上的*Châtelet*曲面S_i。那么存在*Châtelet*曲面丛$V \to \mathbb{A}^1$使得纤维$V_{\theta_i} \simeq S_i$。

在某些温和的额外条件下，这个*Châtelet*曲面丛可以延拓到$\mathbb{P}^1$上，而且使得对于事先给定的$\gamma : C \to \mathbb{P}^1$，它的拉回是一个光滑的射影代数簇。

- 优点：如果给定的γ把C的一个L-点P'映到$P \in \mathbb{P}^1$后剩余类域不缩小(超椭圆曲线容易做到)则$X_{P'} \simeq V_P$本身就是有特定算术性质的L-簇，并不会由于域扩张改变了这个预设的算术性质。
  证明思路
- 当所有$K_i = K$时，就是传统的Lagrange插值，用多项式去插值Châtelet曲面定义方程中的系数
- 当K_i任意时，本质上是中国剩余定理
- 适当地调整插值多项式，用Jacobi判别得到光滑性

Proposition (证明主定理的关键步骤)

给定$\mathbb{A}^1$中的有限个闭点θ_i，令$K_i = K(\theta_i)$为相应的剩余类域。任给定定义在K_i上的*Châtelet*曲面S_i。那么存在*Châtelet*曲面丛$V \to \mathbb{A}^1$使得纤维$V_{\theta_i} \simeq S_i$。

在某些温和的额外条件下，这个*Châtelet*曲面丛可以延拓到$\mathbb{P}^1$上，而且使得对于事先给定的$\gamma : C \to \mathbb{P}^1$，它的拉回是一个光滑的射影代数簇。

- 优点：如果给定的γ把C的一个L-点P'映到$P \in \mathbb{P}^1$后剩余类域不缩小(超椭圆曲线容易做到)则$X_{P'} \simeq V_P$本身就是有特定算术性质的L-簇，并不会由于域扩张改变了这个预设的算术性质。

证明思路

- 当所有$K_i = K$时，就是传统的Lagrange插值，用多项式去插值Châtelet曲面定义方程中的系数
- 当K_i任意时，本质上是中国剩余定理
- 适当地调整插值多项式，用Jacobi判别得到光滑性

Proposition (证明主定理的关键步骤)

给定$\mathbb{A}^1$中的有限个闭点θ_i，令$K_i = K(\theta_i)$为相应的剩余类域。任给定定义在K_i上的*Châtelet*曲面S_i。那么存在*Châtelet*曲面丛$V \to \mathbb{A}^1$使得纤维$V_{\theta_i} \simeq S_i$。

在某些温和的额外条件下，这个*Châtelet*曲面丛可以延拓到$\mathbb{P}^1$上，而且使得对于事先给定的$\gamma : C \to \mathbb{P}^1$，它的拉回是一个光滑的射影代数簇。

- 优点：如果给定的γ把C的一个L-点P'映到$P \in \mathbb{P}^1$后剩余类域不缩小(超椭圆曲线容易做到)则$X_{P'} \simeq V_P$本身就是有特定算术性质的L-簇，并不会由于域扩张改变了这个预设的算术性质。
  证明思路
- 当所有$K_i = K$时，就是传统的Lagrange插值，用多项式去插值Châtelet曲面定义方程中的系数
- 当K_i任意时，本质上是中国剩余定理
- 适当地调整插值多项式，用Jacobi判别得到光滑性

Proposition (证明主定理的关键步骤)

给定$\mathbb{A}^1$中的有限个闭点θ_i，令$K_i = K(\theta_i)$为相应的剩余类域。任给定定义在K_i上的*Châtelet*曲面S_i。那么存在*Châtelet*曲面丛$V \to \mathbb{A}^1$使得纤维$V_{\theta_i} \simeq S_i$。

在某些温和的额外条件下，这个*Châtelet*曲面丛可以延拓到$\mathbb{P}^1$上，而且使得对于事先给定的$\gamma : C \to \mathbb{P}^1$，它的拉回是一个光滑的射影代数簇。

- 优点：如果给定的γ把C的一个L-点P'映到$P \in \mathbb{P}^1$后剩余类域不缩小(超椭圆曲线容易做到)则$X_{P'} \simeq V_P$本身就是有特定算术性质的L-簇，并不会由于域扩张改变了这个预设的算术性质。

  证明思路
- 当所有$K_i = K$时，就是传统的Lagrange插值，用多项式去插值Châtelet曲面定义方程中的系数
- 当K_i任意时，本质上是中国剩余定理
- 适当地调整插值多项式，用Jacobi判别得到光滑性

Proposition (证明主定理的关键步骤)

给定$\mathbb{A}^1$中的有限个闭点θ_i，令$K_i = K(\theta_i)$为相应的剩余类域。任给定定义在K_i上的*Châtelet*曲面S_i。那么存在*Châtelet*曲面丛$V \to \mathbb{A}^1$使得纤维$V_{\theta_i} \simeq S_i$。

在某些温和的额外条件下，这个*Châtelet*曲面丛可以延拓到$\mathbb{P}^1$上，而且使得对于事先给定的$\gamma : C \to \mathbb{P}^1$，它的拉回是一个光滑的射影代数簇。

- 优点：如果给定的γ把C的一个L-点P'映到$P \in \mathbb{P}^1$后剩余类域不缩小(超椭圆曲线容易做到)则$X_{P'} \simeq V_P$本身就是有特定算术性质的L-簇，并不会由于域扩张改变了这个预设的算术性质。

  证明思路
- 当所有$K_i = K$时，就是传统的Lagrange插值，用多项式去插值Châtelet曲面定义方程中的系数
- 当K_i任意时，本质上是中国剩余定理
- 适当地调整插值多项式，用Jacobi判别得到光滑性

Proposition (证明主定理的关键步骤)

给定$\mathbb{A}^1$中的有限个闭点θ_i，令$K_i = K(\theta_i)$为相应的剩余类域。任给定定义在K_i上的*Châtelet*曲面S_i。那么存在*Châtelet*曲面丛$V \to \mathbb{A}^1$使得纤维$V_{\theta_i} \simeq S_i$。

在某些温和的额外条件下，这个*Châtelet*曲面丛可以延拓到$\mathbb{P}^1$上，而且使得对于事先给定的$\gamma : C \to \mathbb{P}^1$，它的拉回是一个光滑的射影代数簇。

- 优点：如果给定的γ把C的一个L-点P'映到$P \in \mathbb{P}^1$后剩余类域不缩小(超椭圆曲线容易做到)则$X_{P'} \simeq V_P$本身就是有特定算术性质的L-簇，并不会由于域扩张改变了这个预设的算术性质。

  证明思路
- 当所有$K_i = K$时，就是传统的Lagrange插值，用多项式去插值Châtelet曲面定义方程中的系数
- 当K_i任意时，本质上是中国剩余定理
- 适当地调整插值多项式，用Jacobi判别得到光滑性

Theorem

假设Stoll猜想成立。任给定有限扩张L/K，存在Châtelet曲面从X使得

- X_K和X_L均违反Hasse原则，
- X_K上Brauer–Manin障碍是唯一障碍，
- X_L上Brauer–Manin障碍不是唯一障碍。

- 问题：能否把"是"和"不是"的位置交换？

Theorem (CT–Poonen 2000, Creutz–Viray 2021, 曹阳 2021)

令X为拟射影光滑K-代数簇，
则$X(\mathbf{A}_K)^{\mathrm{Br}} \neq \varnothing \Rightarrow X(\mathbf{A}_L)^{\mathrm{Br}} \neq \varnothing$。

因此反过来的情况不可能出现。

- 各证明均利用了Weil限制。

Theorem

假设Stoll猜想成立。任给定有限扩张L/K，存在Châtelet曲面丛X使得

- X_K和X_L均违反Hasse原则，
- X_K上Brauer–Manin障碍是唯一障碍，
- X_L上Brauer–Manin障碍不是唯一障碍。

- 问题：能否把“是”和“不是”的位置交换?

Theorem (CT–Poonen 2000, Creutz–Viray 2021, 曹阳 2021)

令X为拟射影光滑K-代数簇，则$X(\mathbf{A}_K)^{\mathrm{Br}} \neq \varnothing \Rightarrow X(\mathbf{A}_L)^{\mathrm{Br}} \neq \varnothing$。

因此反过来的情况不可能出现。

- 各证明均利用了Weil限制。

Theorem

假设*Stoll*猜想成立。任给定有限扩张L/K，存在*Châtelet*曲面丛X使得

- X_K和X_L均违反*Hasse*原则，
- X_K上*Brauer–Manin*障碍是唯一障碍，
- X_L上*Brauer–Manin*障碍不是唯一障碍。

- 问题：能否把“是”和“不是”的位置交换?

Theorem (CT–Poonen 2000, Creutz–Viray 2021, 曹阳 2021)

令X为拟射影光滑K-代数簇，
则$X(\mathbf{A}_K)^{\mathrm{Br}} \neq \varnothing \Rightarrow X(\mathbf{A}_L)^{\mathrm{Br}} \neq \varnothing$。

因此反过来的情况不可能出现。

- 各证明均利用了Weil限制。

Theorem

假设*Stoll*猜想成立。任给定有限扩张L/K，存在*Châtelet*曲面丛X使得

- X_K和X_L均违反*Hasse*原则，
- X_K上*Brauer–Manin*障碍是唯一障碍，
- X_L上*Brauer–Manin*障碍不是唯一障碍。

- 问题：能否把"是"和"不是"的位置交换？

Theorem (CT–Poonen 2000, Creutz–Viray 2021, 曹阳 2021)

令X为拟射影光滑K-代数簇，则$X(\mathbf{A}_K)^{\mathrm{Br}} \neq \varnothing \Rightarrow X(\mathbf{A}_L)^{\mathrm{Br}} \neq \varnothing$。

因此反过来的情况不可能出现。

- 各证明均利用了Weil限制。

谢谢聆听！