Principe local-global pour les 0-cycles

k : corps de nombres

Ω_k , k_v $(v \in \Omega_k)$

$X/_k$ une variété algébrique $/k$.

Supposée propre lisse et géométriquement intègre $/k$

$X(k) \hookrightarrow \prod_{v\in\Omega_k} X(k_v)$ ~~diagonalement~~ application diagonale

principe de Hasse : $X(k_v) \neq \phi \ \forall v \Rightarrow X(k) \neq \phi$

approximation faible : $\overline{X(k)} = \prod X(k_v)$

Manin (70s) $\prod X(k_v) \times Br(X) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ où $Br X = H^2_{ét}(X, \mathbb{G}_m)$

$$\{x_v\}, b \mapsto \sum_{v\in\Omega_k} inv_v(b(x_v))$$

$inv_v : Br\, k_v \hookrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ invariant local.

$[\prod X(k_v)]^{Br}$:= "noyau" à gauche de l'accouplement

On sait $X(k) \subseteq \overline{X(k)} \subseteq [\prod X(k_v)]^{Br} \subseteq \prod X(k_v)$

△ Obstruction de Brauer-Manin

Def L'obstruction de Brauer-Manin est la seule

$\begin{cases} \text{au principe de Hasse} \\ \text{à l'approx. faible} \end{cases}$ pour les points rationnels si

$$\begin{cases} [\prod X(k_v)]^{Br} \neq \phi \Rightarrow X(k) \neq \phi \\ \overline{X(k)} = [\prod X(k_v)]^{Br} \end{cases}$$

Conjecture-pt.

L'obs. de BM est la seule au principe de Hasse et à l'approx. faible par les points rationnels sur

① (Colliot-Thélène 88) toute variété rationnellement connexe.

② (Skorobogatov 2001) toutes les courbes

$CH_0(X)$: groupe de 周 des 0-cycles.

$$CH_0'(X_v) := \begin{cases} CH_0(X_v) & : v \text{ est non-archimédienne.} \\ 0 & , v \text{ est } \cancel{\text{comme}} \text{ complexe.} \\ \mathrm{Coker}[N_{\mathbb{C}|\mathbb{R}} : CH_0(\overline{X_v}) \to CH_0(X_v)] & , v \text{ est réelle.} \end{cases}$$

$$\prod_{v\in\Omega} CH_0'(X_v) \times Br X \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

$\rightsquigarrow$ un complex $CH_0(X) \to \prod_v CH_0'(X_v) \to \mathrm{Hom}(Br X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$

$\rightsquigarrow$ (E) $\varprojlim_n CH_0(X)/n \to \prod_v \varprojlim_n CH_0'(X_v)/n \to \mathrm{Hom}(Br X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$

(où "$\cdot/n$" $= \mathrm{Coker}(\cdot n)$)

(E_0) $\varprojlim_n A_0(X)/n \to \prod_v \varprojlim_n A_0(X_v)/n \to \mathrm{Hom}(Br X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$

Conjecture-0cycl (Colliot-Thélène-Sansuc, Kato-Saito)

La suite (E) est exacte pour toute variété propre lisse.

Remarque.

(1) (E) exacte $\Rightarrow$ (E_0) exacte.

(2) (E) exacte $\Rightarrow$ $\exists \underset{\deg=1}{\{z_v\}} \perp \mathrm{Br} X \Rightarrow \exists \underset{\deg z = 1.}{z \in \otimes CH_0(X)}$

Question. Y a-t-il une relation générale entre les deux conjectures ?

Thm (Liang) Soit X une variété rationnellement connexe (propre lisse).

(1) L'obstruction de BM est la seule pour les points rationnels ~~au principe de Hasse~~ sur X_K pour $\forall K/k$ extension finie.

au principe de Hasse

$\Rightarrow$ — — — — — pour les 0-cycles de degré $\underline{\underline{1}}$

(2) L'obs. de BM est la seule ~~pour les~~ à l'approx. faible pour les ~~pt~~ points rationnels sur X_K $\forall K/k$ finie.

i.e $\overline{X(K)} = \left[\prod_{w\in\Omega_K} X(K_w)\right]^{\mathrm{Br}(X_K)}$

$\Rightarrow$ (E) est exacte pour X.

Cor Soit G un groupe linéaire algébrique connexe.

Y : un espace homogène à stabilisateur connexe.

X : une compactification lisse de Y.

Alors (E) exacte pour X.

Pour les pt. rat. l'obs BM est la seule. (Borovoi 96)

Rem pour le 0-cycles. Ceci n'était pas connu même pour $X = T^c$ une cptification d'un tore algébrique.

idée de la preuve :

$$\begin{array}{c} X \times \mathbb{P}^1 \\ \downarrow \\ \mathbb{P}^1 \end{array}$$

- méthode des fibrations
- Sous-ensemble hilbertien généralisé
  ↳ (pour contrôler les groupes de Brauer des fibres)
- lemme de déplacement pour les 0-cycle.
- Théorème d'irréductibilité de Hilbert
  (version généralisée.)
- X rationnellement connexe $\Rightarrow \begin{cases} \mathrm{Br}\,\overline{X} \text{ fini} \\ \mathrm{Pic}\,\overline{X} \text{ sans torsion} \end{cases}$

  ↳ $\Rightarrow$ $CH_0(X_v) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$ isomorphisme
  (Kollár-Szabó) presque toute v.