Approximation faible pour les 0-cycles sur un produit des variétés

Caen

Yongqi LIANG

§1 Introduction

notations:

X : variété propre lisse géom. int. / k corps de nombres

$\mathrm{Br}X = H^2_{ét}(X, \mathbb{G}_m)$ groupe de Brauer de X.

Manin 70s. :

$$\mathrm{Br}X \times \prod_{v \in \Omega} X(k_v) \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

$$b \quad , \quad (x_v) \longmapsto \sum_{v \in \Omega} \mathrm{inv}_v(b(x_v))$$

$$\overline{X(k)} \subseteq \underbrace{\left[\prod X(k_v)\right]^{\mathrm{Br}X}}_{\text{ensemble de BM}} \subseteq \prod X(k_v)$$

Déf. On dit que l'obstruction de BM est la seule à l'approximation faible pour les points rationnels sur X si $\overline{X(k)} = \left[\prod X(k_v)\right]^{\mathrm{Br}X}$

Thm (Skorobogatov-Zarhin 2014)
Soient X, Y des variétés propres lisses géom. int. / k corps de nombres. Alors, dans $X(k_v) \times Y(k_v)$, on a

$$\left[\prod_v X\times Y(k_v)\right]^{\mathrm{Br}(X\times Y)} = \left[\prod_v X(k_v)\right]^{\mathrm{Br}X} \times \left[\prod_v Y(k_v)\right]^{\mathrm{Br}Y}$$

Cor RTB.

<u>Cor</u> Si l'obstruction de BM est la seule à l'approximation faible pour les points rationnels sur X et sur Y. Alors, c'est aussi le cas pour $X \times Y$.

§2 0-cycles

L'accouplement de BM:

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Br} X \times \prod_{v \in \Omega} CH_0(X_{k_v}) & \longrightarrow & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \\ \cup\!| & & \\ \prod_{v \in \Omega} CH_0^1(X_{k_v}) & & \end{array} \qquad (*)$$

$\deg : CH_0(X) \to \mathbb{Z}$

$CH_0^1 = \deg^{-1}(1)$

presque le même argument, on peut montrer que:

$$\Big[\prod_{v \in \Omega} CH_0^1(X \times Y_{k_v})\Big]^{\operatorname{Br}(X \times Y)} \longrightarrow \Big[\prod_{v \in \Omega} CH_0^1(X_{k_v})\Big]^{\operatorname{Br} X} \times \Big[\prod_{v \in \Omega} CH_0^1(Y_{k_v})\Big]^{\operatorname{Br} Y}$$

l'injectivité ? pas claire

l'obstruction à l'approx. faible sur $X \times Y$? pas claire.

$(*) \leadsto$

$$(E) \quad \varprojlim_n CH_0(X)/n \longrightarrow \prod_{v \in \Omega_k} \varprojlim_n CH_0'(X_{k_v})/n \longrightarrow \operatorname{Hom}(\operatorname{Br} X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

<u>Conjecture</u> (CT-Sansuc, Kato-Saito)

(E) est exacte pour toute X propre lisse.

Ceci signifie que l'obstruction de BM est la seule à l'approx. faible pour les 0-cycles.

Exemples: (E) exacte pour X :

① $X = \mathbb{P}^n$

② (Saito, 99.) $X = C =$ courbe projective lisse, telle que $Ш(Jac(C), k) < +\infty$

③ (Borovoi + Liang 2013)
$X =$ compactification lisse des espaces homogènes d'un groupe algébrique linéaire connexe à stabilisateur connexe.

④ (Harpaz-Wittenberg 2014)
$X =$ Beaucoup de fibrations au-dessus de $\mathbb{P}^n$ ou C.

Question : (E) exacte pour X et Y $\overset{?}{\Rightarrow}$ (E) exacte pour $X \times Y$.

- Si $Y = \mathbb{P}^n$ ok, $CH_0(X \times \mathbb{P}^n) \cong CH_0(X)$
$Br(X \times \mathbb{P}^n) \cong Br(X)$

Thm (Conséquence de Harpaz-Wittenberg)
$Y = C$. courbe $Ш(Jac(C), k) < +\infty$
$X =$ variété rationnellement connexe.
(E) est exacte pour X_K $\forall K/k$ extension finie.

Alors (E) est exacte pour $X \times Y$.

Thm (L. 2014)

Y = Compactification lisse des espaces homogènes d'un groupe algébrique linéaire connexe à stabilisateur connexe.

X = variété rationnellement connexe.

(E) ~~est~~ exacte pour X_K $\forall K/k$ extension finie

Alors (E) ~~est~~ ~~exacte~~ pour $X \times Y$.

Rem. Si X admet un 0-cycle de degré 1, le Thm résulte d'un autre thm. plus général (Liang 2013) concernant certaines fibrations avec "sections"

$$\begin{tikzcd} V \arrow[d] \\ B \arrow[u, dashed, bend right] \end{tikzcd} \quad = RC$$

---

§ 3. démonstration

$$\begin{tikzcd} X \times Y \times \mathbb{P}^1 \arrow[d, "\Pi = \pi \times id"] \\ \cancel{XX} Y \times \mathbb{P}^1 \arrow[d, "pr"] \\ \mathbb{P}^1 \end{tikzcd}$$

On va montrer l'exactitude de (E) pour $X \times Y \times \mathbb{P}^1$

D'après une réduction par Wittenberg.

On commence par $n \in \mathbb{N}^*$ fixé.

$$\underset{\deg = \delta}{(z_v)} \perp Br(X \times Y \times \mathbb{P}^1) \cong Br(X \times Y)$$

On cherche $z \in CH_0(X \times Y \times \mathbb{P}^1)$ tq.

$$z = z_v \text{ dans } CH_0(X_{k_v} \times Y_{k_v} \times \mathbb{P}^1)/n.$$

* Thm Kollár-Szabó :

Si V est rationnellement connexe $/k$.

$\exists S$ fini. de places de k. tq

$\deg : CH_0(V_{k_v}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$. $\forall v \notin S$.

Il suffit de considérer les places $v \in S$ (et controller le degré en dehors de S)

* argument de bonne réduction :

En dehors de S, les évaluations d'éléments de $Br(X \times Y \times \mathbb{P}^1)$ sont nulles

* on fixe un pt fermé F ~~θ~~ $\in X \times Y \times \mathbb{P}^1$.

Quitte à ajouter un multiple de nF à z_v.

+ lemme de déplacement.

on peut remplacer z_v par z_v' $(v \in S)$
$\begin{cases} \text{effectif.} \\ \deg = \delta' \\ \text{bonne position : } (\mathrm{pro}\Pi)_*(z_v') \text{ est réduit.} \\ (z_v') \perp (Br(X \times Y \times \mathbb{P}^1)) \end{cases}$

* approximer $(\mathrm{pro}\Pi)_*(z_v') \in \mathbb{P}^1$ par un 0-cycle global $\lambda \in \mathbb{P}^1$ $(\deg = \delta')$

[essentiellement, c'est une approximation de polynômes
$k[T] \subseteq \prod_{v \in \Omega} k_v[T]$]

* Thm d'irréductibilité de Hilbert : On peut demander ~~de~~ en plus que λ soit un pt fermé.

* $\Pi_w(z_v') \perp Br(Y \times \mathbb{P}^1)$ (fonctorialité)

déplacer les 0-cycles $\Pi_*(z_v')$ d'après le thm des $(v \in S)$

fonctions implicites, on obtient y_v' sur $pr^{-1}(\lambda) \cong Y_K$ $(K = k(\lambda))$.

y_v' proche de $\Pi_*(z_v')$

* Y_K = compactification lisse d'un espace homogène.

__Borovoi :__ $\exists \theta \in pr^{-1}(\lambda)$ tq θ est proche de y_v' ainsi que de $\Pi_w(z_v')$

__Lemme :__ X, Y rationnellement connexe $/k$.

Alors $\exists\, l/k$ extension finie tq $\forall K/k$ extension finie linéairement disjointe de l/k.

La composition

$$\frac{Br(X \times Y)}{Br\,k} \xrightarrow{(\simeq)} \frac{Br(X_K \times Y_K)}{Br\,K} \xrightarrow[\theta^*]{(\text{si } \exists \theta)} \frac{Br X_K}{Br\,K} \quad \text{est surjective}$$

où $\theta \in Y_K(K)$

* déplacer les z_v',

on obtient z_v'' sur $\Pi^{-1}(\theta) \cong X_K$, z_v'' proche de z_v'

(pour $v \notin S$: Lang-Weil + Hensel)

la surjectivité du lemme $\Rightarrow$ $z_v'' \perp Br X_K$

$*$ (E) exacte pour X_K

$\Rightarrow \exists\, z_0 \in CH_0(\pi^{-1}(\mathcal{O}))$ tq $z_0 = z_v'' \in CH_0(X_{k_v})/n$ $(v \in S)$

vu comme $\downarrow$

$z \in CH_0(X \times Y \times \mathbb{P}^1)$. $\quad z = z_v \in CH_0(X_{k_v} \times Y_{k_v} \times \mathbb{P}^1)/n$

#.

<u>Rem</u>. On ne sait pas approximer une famille de 0-cycles locaux par un point fermé sur Y, mais on sait le faire pour $Y \times \mathbb{P}^1$