(Grenoble) Yongqi LIANG

Zéro-cycles sur les fibrations en surfaces de Châtelet au-dessus d'une courbe

Notation.

k. Ω k_v $(v \in \Omega)$.

$X_{/k}$ une variété (schéma séparé de t.f)

Supposée propre lisse géométriquement intègre

$X_v = X \otimes_k k_v$ $\quad \mathrm{Br}\,X = H^2_{et}(X, \mathbb{G}_m)$

$$Z_0(X) = \bigoplus_{\substack{P \in X \\ \text{pt. fermé}}} \mathbb{Z} \cdot P \qquad CH_0(X) = Z_0(X) / \sim_{\text{équivalence rationnelle}}$$

$$\deg : CH_0(X) \to \mathbb{Z}$$

Question Existe-t-il un 0-cycle de degré 1 sur X ?

Principe local-global de Hasse :

$\exists$ 0-cycle de deg 1 sur X $\Rightarrow$ $\exists$ 0-cycles deg 1 sur X_v $\forall v \in \Omega_k$

$\Leftarrow$?

Si c'est le cas, on dit que PH vaut pour les 0-cycles de deg. 1.

- le groupe de Brauer donne une obstruction au PH
- l'accouplement de Manin :

$$\prod Z_0(X_v) \times \mathrm{Br}\,X \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

$$\{z_v\}, b \longmapsto \langle \{z_v\}, b \rangle = \sum_{v \in \Omega} \mathrm{inv}_v \Big(\sum_{P_v} n_{P_v} \mathrm{cores}_{k(P_v)/k_v} (b(P_v)) \Big)$$

$\{z_v\} = \sum n_{P_v} P_v$ $\qquad \mathrm{inv}_v : \mathrm{Br}\,k_v \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$

Fait $0 \to \mathrm{Br}\,k \to \bigoplus \mathrm{Br}\,k_v \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0$.

$\Theta \cdot Z_0(X) \hookrightarrow \prod_{v \in \Omega} Z_0(X_v)$

$\forall z \in Z_0(X)$ Θ $\mathrm{im}(z) \perp b$ $\forall b \in \mathrm{Br}\,X$

<u>Question modifiée</u>:

Si $\exists \{z_v\} \perp \mathrm{Br}\,X$ $\deg z_v = 1$.

$? \exists z : \deg z = 1$?

Si c'est le cas, on dit que l'obstruction de Brauer-Manin est la seule au principe de Hasse pour les 0-cycles de degré 1.

~~$\prod Z_0$~~ Approximation faible :

$\prod Z_0(X_v) \times \mathrm{Br}\,X \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$

$CH_0(X_v)$

$CH_0'(X_v)$

$$CH_0'(X_v) = \begin{cases} CH_0(X_v) & . \ v \text{ est non-archimédienne} \\ 0 & . \ v \text{ est complexe} \\ \mathrm{Coker}\left(N_{\mathbb{C}/\mathbb{R}} : CH_0(X_{\mathbb{C}}) \to CH_0(X_{\mathbb{R}})\right) & . \ v \text{ est réelle} \end{cases}$$

$$CH_0(X) \to \prod_v CH_0'(X_v) \to \mathrm{Hom}(\mathrm{Br}\,X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

$$CH_0(X)/m \to \prod_v CH_0'(X_v)/m \to \mathrm{Hom}(\mathrm{Br}\,X[m], \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

$$(E) \quad \varprojlim_m CH_0(X)/m \to \prod_v \varprojlim_m CH_0'(X_v)/m \to \mathrm{Hom}(\mathrm{Br}\,X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

$$(E_0) \quad \varprojlim_m A_0(X)/m \to \prod_v \varprojlim_m A_0(X_v)/m \to \mathrm{Hom}\left(\frac{\mathrm{Br}\,X}{\mathrm{Br}\,k}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}\right)$$

où $A_0 = \ker(\deg : CH_0 \to \mathbb{Z})$

CMUC

Conjecture (Colliot-Thélène–Sansuc, Kato–Saito)
(E) est exacte pour toute variété propre lisse (géo. int.)

Remarque
(E) exacte $\Rightarrow$

- (E_0) exacte
- l'obstruction de Brauer–Manin est la seule au PH pour les 0-cycles de deg. 1
- ——————————— à l'AF pour les 0-cycles de deg δ.

i.e. $\forall m>0 \ \forall S_{\text{fini}} \subseteq \Omega_k. \ \{z_v\} \perp \mathrm{Br} X \ \deg z_v = \delta$

$\Rightarrow \exists z = z_{m,S}, \ \deg z = \delta$ tq $z = z_v \in CH_0(X_v)/m. \ \forall v \in S.$

Résultats connus.

- $\dim X = 0$. $X = \mathrm{Spec}\, k$.
  (E) est le dual de " $\mathrm{Br}\, k \to \bigoplus \mathrm{Br}\, k_v \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ ".
- $\dim X = 1$ $X =$ une courbe
  Saito 89. Colliot-Thélène 99.
  (E) exacte si $Ш(\mathrm{Jac}\, X/k) < +\infty$.

En particulier si $X = E$ une courbe elliptique on trouve

$$\overline{E(k)} \to \prod_{v \in \Omega} E(k_v)' \to H^1(k,E)^* = \left(\frac{\mathrm{Br}\, E}{\mathrm{Br}\, k}\right)^* \quad {}^* := \mathrm{Hom}(-, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

$$(\longrightarrow Ш(k,E)^* \to 0)$$

la suite de Cassels–Tate.

- $\dim X > 1$.
  2 types des résultats: fibrations ; espace homogène.

Thm (Wittenberg 2009) C. $Ш(\mathrm{Jac}\, C/k) < +\infty$. $X \to C$ fibration

- à fibres abélien-scindées (par exemples, si les fibres sont géométriquement intègres)
- toute fibre, à l'exception d'un nombre fini, satisfait l'approximation faible pour les points rationnels ou pour les 0-cycles de degré 1.

$\Rightarrow$ (E) exacte pour X.

~~Motivation de mon travail~~.

Exemple de Poonen (2010)

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & V \\ \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle \text{fibré en surface de Châtelet}} \\ C & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{P}^1 \ni t \end{array}$$

V: $y^2 - az^2 = P_t(x)$

$a \in k^* \setminus k^{*2}$

$P_t(x) \in k(t)[x]$ $\deg_x P_t = 4$ irréductible $/ k(t)$

Poonen :

- $\infty \in \mathbb{P}^1(k)$. la fibre $V_\infty(k_v) \neq \emptyset$ $\forall v$
- $C(k) \neq \emptyset$ fini.
- $\psi(C(k)) = \infty \in \mathbb{P}^1(k)$

$\Rightarrow$ $X(k_v) \neq \emptyset$ et de plus $\exists\, x_v \in X(k_v)$, $\{x_v\} \perp \mathrm{Br}\, X$, mais $X(k) = \emptyset$!

i.e. l'obstruction de Brauer-Manin n'est pas la seule au principe de Hasse pour les points rationnels sur X.

Remarque : Dans ce cas, à ~~priori~~ fortiori ~~$\exists$ 0-cycles local~~ $\{x_v\}$ est ~~un~~ famille de 0-cycles de deg. 1 $\{x_v\} \perp \mathrm{Br}\, X$

Thm (Colliot-Thélène 2010) $\exists\, z \in CH_0(X)$, $\deg z = 1$.

- Attention On ne peut pas appliquer le résultat de Wittenberg pour obtenir un 0-cycle global.

Pour un point fermé $\theta \in C$, la fibre X_θ

Satisfait PH (ou AF) si $P_{\psi(\theta)}(x) \in k(\theta)[x]$ est irréductible.
Il y a beaucoup de fibres qui probablement ne satisfont pas PH (ou AF)

Def : V : variété géométriquement intègre sur un corps k.
Hil un sous-ensemble de points fermés de V est dit un sous-ensemble hilbertien généralisé si

$$\exists\ Z \xrightarrow[\text{ét. fini}]{\rho} \overset{\phi}{\underset{\#}{U}} \underset{\text{ouvert}}{\subset} V$$ où Z est une variété intègre.

tq $\mathrm{Hil} = \{\theta \in U \text{ pt. fermé}, \ \rho^{-1}(\theta) \text{ est connexe}\}$.

Dans l'exemple de Poonen.

$$\mathrm{Hil} = \{\theta \in C \mid P_{\psi(\theta)}(x) \in k(\theta)[x] \text{ est irréductible sur } k(\theta)\} \subseteq C$$

est un sous-ensemble hilbertien généralisé.

Thm (L. 2010) Soit $X \to C$ une fibration à fibres géométriquement intègres. On suppose que

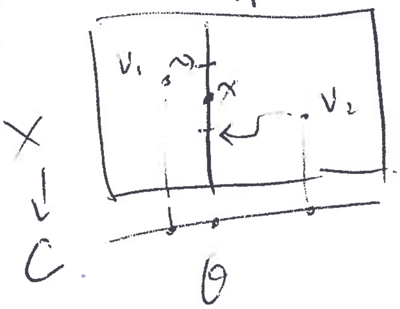
- Ш$(\mathrm{Jac}(C)/k) < +\infty$
- $\exists\ \mathrm{Hil} \subset C$ un sous-ensemble hilbertien généralisé tq $\forall \theta \in \mathrm{Hil}$, la fibre X_θ satisfait le PH (resp. AF) pour les points rationnels ou pour les 0-cycles de degré 1

Alors, l'obstruction de BM est la seule au PH pour les 0-cycles de degrée 1 (resp. (E) est exacte pour X)

Cor (E) est exacte pour les solides de Poonen.

Démonstration (esquissée) du théorème :

- rappel de la méthode des fibrations (pour les points rationnels)



deux difficultés :

1. passer des ~~points~~ 0-cycles aux points rationnels
2. trouver $\theta \in \mathrm{Hil}$ au lieu de "$\in C$".

(1) "bonnes places"

$X \to C$ à fibres géométriquement intègres, on utilise les estimations de Lang-Weil en famille + le lemme de Hensel : :

$\exists \underset{\text{fini}}{S} \subseteq \Omega_k$ tq. $\forall \underset{\text{fermé}}{\theta \in C}$ $\forall w \in \Omega_{k(\theta)} \setminus S$

on ait $X_\theta(k(\theta)_w) \neq \phi$.

(2) mauvaises places $v \in S$

- lemme de déplacement : on ramène un problème sur les 0-cycles à un problème sur les cycles effectifs bien placés (séparable) + le théorème des fonctions implicites.

Pour conclure, il reste :

Comment approximer les 0-cycles effectifs par un pt. fermé $\theta \in \mathrm{Hil}$?

Lem clé : Soit C une courbe (projective, lisse, géo. int) sur un corps de nombres k. On note $g = g(C)$ le genre de C. $\mathrm{Hil} \subset C$ un ss-ens hilbertien généralisé.

Soient $y \in Z_0(C)$ un 0-cycles effectif. $\deg y = d > 2g$.

$S \subset \Omega$ fini. Pour toute $v \in S$. Soit $z_v \in Z_0(C_v)$ un 0-cycles eff. séparable de degrée d. tq $\mathrm{Supp}(z_v) \cap \mathrm{Supp}(y) = \phi$. et $z_v \sim y$ sur C_v. Alors, $\exists$ un point fermé $\theta \in C$ tq.

(1) $\theta \in \mathrm{Hil}$

(2) $\theta \sim y$ sur C.

(3) θ soit suffisamment proche de z_v pour toute $v \in S$.

<u>Démonstration</u>.

$v \in S$ $\quad z_v - y = \mathrm{div}_{C_v}(f_v) \quad f_v \in k(C_v)^*/k_v^*$.

$\deg y = d > 2g \xRightarrow{RR} \Gamma(C, \mathcal{O}_C(y))$ est un espace vectoriel de dim $r = d+1-g > g+1 \geq 1$

AF pour $\mathbb{P}^{r-1} \Rightarrow \exists f \in k(C)^*/k^*$ tq

(i) f suffisamment proche de f_v $(v \in S)$

(ii) $\mathrm{div}_C(f) = y' - y$ où y' est un 0-cycle eff. $\mathrm{Supp}(y') \cap \mathrm{Supp}(y) = \phi$.

Alors $\underset{\text{suffisamment proche}}{y' \simeq z_v}$ $(v \in S)$

f définit un k-morphisme $\varphi : C \to \mathbb{P}^1$ tq

$$\varphi^*(\infty) = y$$
$$\varphi^*(0) = y'.$$

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hil}^{\subseteq C} \arrow[r, leftrightarrow] & Z \arrow[r] \arrow[dr, "\varphi'"'] & U \subset C \arrow[d, "\varphi"] \\ \exists\ \mathrm{Hil}'_{\subseteq \mathbb{P}^1} \arrow[r, leftrightarrow] & & \mathbb{P}^1 \end{tikzcd}$$

tq :

$$\theta' \in \mathrm{Hil}' \Rightarrow \theta = \varphi^{-1}(\theta') \in \mathrm{Hil}.$$

Thm d'irréductibilité de Hilbert (version effective par Ekedahl) dit que $\mathrm{Hil}' \cap \mathbb{P}^1(k)$ est dense dans $\prod_{v \in S} \mathbb{P}^1(k_v)$.

$$\Rightarrow \quad \exists\, \theta' \qquad \theta' \approx 0 \in \mathbb{P}^1(k_v) \quad (v \in S)$$

$$\Rightarrow \quad \theta := \varphi^{-1}(\theta') \in \mathrm{Hil} \qquad \theta \approx \varphi^*(0) = y' \approx z_v \quad (v \in S)$$

De plus, on sait que $\theta \sim y' \sim y$ sur C.

#