PURETÉ ARITHMÉTIQUE À L'APPROXIMATION FORTE ET CONTRE-EXEMPLES

YONGQI LIANG

RÉSUMÉ.

Je vais parler de mes travaux en cours avec Yang CAO et Fei XU. Soit X une variété lisse géométriquement intègre définie sur un corps de nombres. Il est connu que si X satisfait l'approximation faible avec l'obstruction de Brauer-Manin, alors il en va de même pour un ouvert de X si son complémentaire est de codimension ≥ 2 d'après la pureté du groupe de Brauer.

Par contre ce n'est pas toujours le cas pour l'approximation forte. En conséquence de la dualité de Poitou-Tate, l'approximation forte (et faible) pour tout variété abélienne est contrôlé par son groupe de Brauer si $Ш(A)$ est fini. Nous trouvons, sur chaque corps de nombres, de variétés abéliennes A de dimension quelconque telles que $A \setminus O$ ne satisfait pas l'approximation forte avec l'obstruction de Brauer-Manin. La preuve généralise un argument de Harari et Voloch.

YONGQI LIANG
INSTITUT DE MATHÉMATIQUES DE JUSSIEU - PARIS RIVE GAUCHE,
UNIVERSITÉ PARIS DIDEROT - PARIS 7,
BÂTIMENT SOPHIE GERMAIN,
75205 PARIS CEDEX 13, FRANCE
E-mail address: yongqi.liang@imj-prg.fr

Date: 3 octobre 2016.

Pureté arithmétique à l'approximation forte et contre-exemples

travail en cours avec CAO Yang et XU Fei

Notations

k. $\Omega_k = \Omega_k^f \sqcup \infty_k$.

$\mathbb{A}_k$. $\mathbb{A}_k^S = \{S\text{-adèles}\} = \prod'_{v \notin S} k_v$ $\quad pr^S : \mathbb{A}_k \to \mathbb{A}_k^S$ projection

X : k-variété lisse géom. intègre (pas forcément propre)

Accouplement de Brauer–Manin

$$\prod_{v\in\Omega} X(k_v) \times \mathrm{Br}_{nr} X \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

$$X(\mathbb{A}) \times \mathrm{Br}\, X \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$
$$(x_v) \,,\, b \longmapsto \sum_{v\in\Omega} \mathrm{inv}_v\big(b(x_v)\big)$$

$$X(k) \subseteq \overline{X(k)} \subseteq \Big[\prod X(k_v)\Big]^{\mathrm{Br}_{nr}} \subseteq \prod X(k_v) \quad \text{topologie produite.}$$

$$X(k) \subseteq \overline{X(k)} \subseteq X(\mathbb{A})^{\mathrm{Br}} \subseteq X(\mathbb{A}) \qquad \text{topologie adélique}$$

Déf. Approx. faible avec l'obstruction de Brauer-Manin si

$$\overline{X(k)} = \Big[\prod X(k_v)\Big]^{\mathrm{Br}_{nr}}$$

Rq Pureté arithmétique : si c'est le cas pour X, alors c'est aussi le cas pour $X \setminus \geq\mathrm{codim}\, 2$.

L'analogie pour l'approx. forte n'est pas correcte !

<u>Déf</u> $S \subset \Omega_k$ fini. On dit que X vérifie <u>l'approx forte avec l'obstruction de Brauer-Manin</u> hors de S

si $X(k)$ est dense dans $pr^S(X(\mathbb{A})^{Br}) \subseteq X(\mathbb{A}^S)$

$\forall k$ corps de nombres. $\underset{(n\geq 2)}{\mathbb{G}_m^{n-1}} \times \mathbb{G}_a$ vérifie l'approx. forte avec l'obstruction de Brauer-Manin hors de ∞_k.

(Harari 2008).

<u>Cao-Xu 2013</u> : $k = \mathbb{Q}$ ou un corps quadratique imaginaire.

$X = \mathbb{G}_m^{n-1} \times \mathbb{G}_a \setminus$ un pt rationnel.

X ne vérifie pas l'approx. forte avec l'obstruction de Brauer-Manin hors de ∞.

<u>Question</u> : Peut-on remplacer $\mathbb{G}_m^{n-1} \times \mathbb{G}_a$ par une variété abélienne A ou un tore T ?

A : variété abélienne $/k$. Supposons que $Ш(A,k) < \infty$

Cassels-Tate : $0 \to \overline{A(k)} \to \prod_{v \in \Omega} A(k_v)_\bullet \to H^1(k, A^\vee)^D \to Ш(A) \to 0$

$$A(k_v)_\bullet = \begin{cases} A(k_v) & \text{si } v \in \Omega^f \\ \pi_0(A(k_v)) & \text{si } v \in \infty \end{cases}$$

A vérifie l'approx. forte et faible avec l'obstruction BM hors de ∞

$A \setminus 0$ vérifie l'approx. faible avec l'obstruction BM hors de ∞

<u>Question</u> : $A \setminus 0$ l'approx forte ?

dim 1

Thm 1. $E/_k$ courbe elliptique $E^\circ = E \setminus 0$

Si $\mathrm{rg}\, E(k) \geq 1$ alors E° ne vérifie pas l'approx. forte avec l'obstruction BM hors de ∞

[Si $Ш(E) < +\infty$, la réciproque est aussi vrai. (Cassels-Tate + Liu-Xu)]

---

exemple

Harari-Voloch 2010 : $k = \mathbb{Q}$. $E : y^2 = x^3 + 3$

$E : y^2 = x^3 - x \,/\mathbb{Q}$

$E^{(-5)} : -5y^2 = x^3 - x \,/\mathbb{Q}$ twist quadratique $k = \mathbb{Q}(\sqrt{-5})$

Tian-Yuan-Zhang + Gross-Zagier + Kolyvagin :

$\mathrm{rg}\, E(\mathbb{Q}) = 0$, $\mathrm{rg}\, E^{(-5)}(\mathbb{Q}) = 1$, $\mathrm{rg}\, E(k) = 1$

$$\left.\begin{array}{l} Ш(E,\mathbb{Q}) < \infty \\ Ш(E^{(-5)},\mathbb{Q}) < \infty \end{array}\right\} \Rightarrow Ш(E,k) < \infty$$

E vérifie l'approx. (très) forte avec l'obstruction de BM hors de ∞

a-Xu

$\Rightarrow X = E \setminus 0$ vérifie l'approx. (très) forte avec l'obstruction BM hors de ∞

mais X_k ne vérifie pas l'approx. forte avec l'obs. BM. hors de ∞

(pas stable après changement de base)

* la preuve du Thm 1 utilise Thm de Siegel à la courbe ~~hyperb~~ hyperbolique E°.

<u>dim ≥ 2</u>. pas de Siegel pour $A \setminus 0$.

<u>Lem</u>. (généralisation d'un argument de Poonen)

$x \in X(k)$, $y \in Y(k)$ $X^\circ = X \setminus x$, $Y^\circ = Y \setminus y$. $V = X \times Y \setminus (x, y)$

$Y(k)$ discret dans $Y(\mathbb{A}^S)$

Si V vérifie l'approx. forte avec l'obs. BM hors de S

Alors X° vérifie l'approx. forte avec l'obs. BM par rapport à $\mathrm{Im}(\mathrm{Br} X \to \mathrm{Br} X^\circ)$ hors de S.

<u>Lem</u> + <u>Thm 1</u> $\Rightarrow$.

<u>Thm 2</u>. E : courbe elliptique $\mathrm{rg}\, E(k) \geq 1$

A : var. ab. $\mathrm{rg}\, A(k) = 0$

Alors $(A \times E) \setminus 0$ ne vérifie pas l'approx. forte avec l'obs BM hors de ∞.

<u>Rq</u>. Ça existe sur tout corps de base k, en toute dim.

En fait, Mazur-Rubin 2009 : $\forall k$, $\exists E_1$ tq $E_1(k) = \{0\}$

On prend $A = E_1^n$. et $E : y^2 = x^3 + 2$. $\mathrm{rg}\, E(\mathbb{Q}) = 1$
$\mathrm{rg}\, E(k) \geq 1$.

Tores algébriques

Thm 3 k = quadratique imaginaire

$T = R^1_{k/\mathbb{Q}} \mathbb{G}_m \quad /\mathbb{Q} \qquad n \geq 2 \qquad X_{\mathbb{Q}} = (T^{n-1} \times \mathbb{G}_m) \setminus \{1\}$

Alors :

- $X_{\mathbb{Q}}$ vérifie l'approx. forte avec l'obs. BM hors de ∞
- X_k — — — —
- X_ℓ ne vérifie pas — — —

pour tout ℓ totalement réel $\neq \mathbb{Q}$

$\left[\; T(k) \text{ discret dans } T(\mathbb{A}^{\infty}_k) \;\right]$

Cas $n=1$: Conjecture (Harari-Voloch) $C \subseteq \mathbb{P}^1$ toute courbe hyperbolique rationnelle vérifie l'app. forte avec l'obs. BM. hors de ∞.

Nous pouvons montrer que

$\mathbb{G}_m \setminus \{1\}$ ne vérifie pas l'approx. forte avec l'obs. BM par rapport à $\mathrm{Im}(\mathrm{Br}\,\mathbb{G}_m \to \mathrm{Br}(\mathbb{G}_m \setminus 1))$ hors de ∞

$\subsetneq \mathrm{Br}(\mathbb{G}_m \setminus 1)$

différence au cas E : $\mathrm{Im}(\mathrm{Br}\,E \to \mathrm{Br}(E \setminus 0)) = \mathrm{Br}(E \setminus 0) = \mathrm{Br}\,E$

Question ouverte : $(\mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m) \setminus \{1\}$?