Principe local-global pour les 0-cycles.

k = corps de nombres.

Ω_k. k_v $(v \in \Omega_k)$

X/k une variété algébrique (schéma séparé de type fini sur un corps) supposée ~~prop~~ propre lisse et géométriquement intègre $/k$.

$X_v = X \otimes_k k_v$

$\mathrm{Br}X = H^2_{\text{ét}}(X, \mathbb{G}_m)$ le group de Brauer de X.

$CH_0(X)$ le group de 周 des 0-cycles

---

§1. principe local-global pour les points rationnels.

$$X(k) \subset \prod_{v \in \Omega_k} X(k_v)$$

principe de Hasse : $X(k_v) \neq \emptyset \ \forall v \Rightarrow X(k) \neq \emptyset$.

Manin (1970s) :

$$\prod_{v \in \Omega_k} X(k_v) \times \mathrm{Br}(X) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$
$$\{x_v\} \ , \ b \mapsto \sum_{v \in \Omega_k} \mathrm{inv}_v(b(x_v))$$

$\mathrm{inv}_v : \mathrm{Br}\,k_v \hookrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ invariant local.

$\left[\prod X(k_v)\right]^{\mathrm{Br}}$:= le "noyau à gauche" de l'accouplement.

On sait

$$X(k) \subseteq \overline{X(k)} \subseteq \left[\prod X(k_v)\right]^{\mathrm{Br}} \subseteq \prod X(k_v)$$

Si $\left[\prod X(k_v)\right]^{\mathrm{Br}} = \emptyset$ on a $X(k) = \emptyset$.

i.e. le group de Brauer donne une obstruction au principe de Hasse.

Déf L'obstruction de BM est la seule obstruction au principe de Hasse (~~à la~~ resp. à l'approximation faible) pour les points rationnels.

Si $\left[\prod X(k_v)\right]^{Br} \neq \phi \Rightarrow X(k) \neq \phi$ (resp. si $\overline{X(k)} = \left[\prod X(k_v)\right]^{Br}$)

Exemple

(Borovoi 1996)

G : un groupe algébrique linéaire connexe

Y : un espace homogène de G à stabilisateur connexe

X : une compactification lisse de Y

L'obstruction de BM est la seule au PH à l'AF pour les pts rationnels sur X.

~~Contre-exemples :~~

~~(Skorobogatov 1999) une surface biellitique X tq~~ $\cancel{\phi = X(k) \subsetneq \left[\prod X(k_v)\right]^{Br}}$

~~(Poonen 2010) un fibré en surface de Chatelet au-dessus d'une courbe de genre > 0. tq~~ $\cancel{\phi = X(k) \subsetneq \left[\prod X(k_v)\right]^{Br}}$.

Conjecture-pt L'obstruction de BM est la seule au principe de Hasse et à l'approximation faible pour les points rationnels sur

① ~~toute~~ (~~Collio~~ Colliot-Thélène 1988) toute variété rationnellement connexe.

② (Skorobogatov 2001) toute courbe.

§2 principe local-global pour les 0-cycles

De la même façon.

$$\prod_{v\in\Omega} CH_0'(X_v) \times \operatorname{Br} X \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

$$CH_0'(X_v) = \begin{cases} CH_0(X_v), & v \text{ est finie} \\ 0, & v \text{ est complexe.} \\ \operatorname{Coker}\left[N_{\mathbb{C}/\mathbb{R}} : CH_0(\bar{X}_v) \to CH_0(X_v)\right], & v \text{ est réelle.} \end{cases}$$

$\rightsquigarrow$ un complexe

$$CH_0(X) \longrightarrow \prod_v CH_0'(X_v) \longrightarrow \operatorname{Hom}(\operatorname{Br} X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

$\forall n \in \mathbb{Z}_{>0}$ ("$/n$" : $\operatorname{coker}(n\cdot)$)

$$CH_0(X)/n \longrightarrow \prod_v CH_0'(X_v)/n \longrightarrow \operatorname{Hom}((\operatorname{Br} X)[n], \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

(E) $$\varprojlim_n CH_0(X)/n \to \prod_v \varprojlim_n CH_0'(X_v)/n \to \operatorname{Hom}(\operatorname{Br} X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

(E_0) $$\cancel{\varprojlim_n} \cancel{CH_0(X)} \ \varprojlim_n A_0(X)/n \to \prod \varprojlim_n A_0(X_v)/n \to \operatorname{Hom}(\operatorname{Br} X, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}).$$

où $$A_0(X) = \ker\left(\deg : CH_0(X) \to \mathbb{Z}\right)$$

Conjecture-0cyc. (Colliot-Thélène-Sansuc, Kato-Saito)

la suite (E) est exacte pour toute variété (propre lisse)

Remarque

(1) (Wittenberg) ~~Exact~~ l'Exactitude de (E) $\Rightarrow$ l'exactitude de (E_0)

(2) (Wittenberg) (E) est exacte $\Rightarrow$ l'obstruction de BM est la seule au principe de Hasse pour les 0-cycles de degré 1. i.e. $\exists \{z_v\} \perp \operatorname{Br} X \Rightarrow \exists z \in Z_0(X)$

(3) (E) est exacte $\Rightarrow$ l'obstruction de BM est la seule à l'approx. faible pour les 0-cycles de degré δ :

i.e. $\forall n \in \mathbb{Z}_{>0}, \forall S \underset{\text{fini}}{\subseteq} \Omega_k$.

Si $\{z_v\} \perp \operatorname{Br} X \quad \deg z_v = \delta \ (\forall v \in \Omega_k)$

$\exists \underset{\llcorner \deg \delta}{z = z_{n,S}}$ tq $z = z_v$ dans $CH_0(X_v)/n$. $\underline{\forall v \in S}$

Exemple

$X = C$ courbe $\quad Ш(\operatorname{Jac}(C), k) < +\infty$.

$\Rightarrow$ (E) est exacte pour C.

(Saito 1989
Colliot-Thélène 1999)

Cas particulier :
$X = E$ courbe elliptique

模小于 Ω_∞.

$$(E_0): \quad \overline{E(k)} \longrightarrow \prod_{v \in \Omega_k} E(k_v)' \longrightarrow \left(\frac{\operatorname{Br} E}{\operatorname{Br} k}\right)^* = \left(H^1(k, E)\right)^*$$

(Cassels-Tate) $\qquad\qquad (\to Ш^1(k, E)^* \to 0)$

Question

Y a-t-il une relation entre l'arithmétique des points rationels et l'arithmétique des 0-cycles ?

Conjecture-pt $\overset{?}{\Longleftrightarrow}$ Conjecture-0cyc

---

§3. Points rationnels vs. 0-cycles.

3.1 sur les courbes. (E) est exacte pour les 0-cycles.

pour les points rationnels, la conjecture-pt reste ouverte (Skorobogatov).

3.2 (ii) Poonen 2010 : $\exists X$, dim 3, $\begin{array}{c} X \\ \downarrow \\ C \end{array}$. fibres = surfaces de Châtelet.

tq $X(k)=\emptyset$, $\left[\prod X(k_v)\right]^{Br} \neq \emptyset$.

(a fortiori, $\exists \{z_v\} \perp Br X$)
$\hookrightarrow$ deg 1.

$\boxed{\text{fibre générique : } x^2 - ay^2 = P(z) \in k[z],\ \deg P = 4}$

Colliot-Thélène 2010 : Il existe un 0-cycle de degré 1 sur les solides de Poonen.

Thm 3.3 (梁 2010 :) (E) est exacte pour les solides de Poonen.

Rappel. ~~Une relation entre les deux conjectures :~~

Conjecture-pt : l'obs BM seule / RC ($\leftarrow$ une condition purement géométrique)

Def. Une variété $X/_k$ est dite <u>rationnellement connexe</u>, si pour tout couple de points géométriques $Q_1, Q_2 \in X(\mathbb{C})$, il existe une $\mathbb{C}$-courbe rationnelle $f : \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \to X_{\mathbb{C}}$ passant par Q_1 et Q_2 i.e. tq. $f(0)=Q_1$,
$f(\infty)=Q_2$

(Contre-) exemples

- toute variété (k-)unirationnelle ~~est~~ rationnellement connexe.

  en particulier, ~~un espace~~ tout espace homogène d'un groupe algébrique linéaire connexe est rationnellement connexe.

- ~~Toute~~ ~~Une~~ ~~Les~~ Aucune variétés abéliennes ~~n'est~~ ~~ne sont~~ ~~pas~~ n'est rationnellement connexe.

- ~~Une~~ ~~Toute~~ Aucune courbe de genre > 0 n'est ~~pas~~ rationnellement connexe.

Une relation entre les deux conjectures :

On considère les assertions suivantes :

(pt-PH^{BM}) l'obstruction de BM est la seule au ~~PH~~ Principe de Hasse pour les points rationnels sur X_K pour $\forall K/k$ extension finie.

~~(pt-AF^{BM})~~ (pt-$Approx^{BM}$) l'obstruction de BM est la seule ~~au~~ à l'approx. faible pour les points rationnels sur X_K pour $\forall K/k$ extension finie.

i.e. $\overline{X_K(K)} = \left[\prod_{w \in \Omega_K} X_K(K_w)\right]^{Br(X_K)}$

($0cyc^1$-PH^{BM}) l'obstruction de BM est la seule ~~à~~ au Principe de Hasse pour les 0cycles de degré 1 sur X_K pour $\forall K/k$ finie.

~~($0cyc$-AF^{BM})~~ ($0cyc^1$-$Approx^{BM}$) l'obstruction de BM est la seule à l'approx. faible pour les 0-cycles de degré 1 sur X_K pour $\forall K/k$ finie.

Thm (梁, 2011)

Si X est rationnellement connexe,

Alors $(\text{pt-PH}^{BM}) \Rightarrow (0\text{cyc}^1\text{-}\sout{\text{AF}^{BM}}\,\text{PH}^{BM})$

$\sout{(\text{pt-AF}^{BM}) \Rightarrow}$

$(\text{pt-Approx}^{BM}) \Rightarrow (0\text{cyc}^1\text{-Approx}^{BM}) \Rightarrow (E), (E_0)$ sont exactes pour X_K ($\forall\, K/k$ finie)

+ résultat de Borovoi

Cor.

(E), (E_0) sont exactes pour toute compactification lisse d'un espace homogène à stabilisateur connexe d'un groupe linéaire connexe.

Remarque.

Dans le preuve, on ~~..~~ considère la fibration triviale

$$\begin{array}{c} X \times \mathbb{P}^1 \\ \downarrow \\ \mathbb{P}^1 \end{array}.$$

~~Des Fibrations plus générales~~ ~~Certaines fibrations~~ ~~au-dessus de l'espace projective ou au dessus des courbes sont~~ aussi ~~étudiées en utilisant d'autres méthodes.~~

L'exactitude de (E) est aussi montré pour certaines fibrations plus générales au-dessus des courbes ou au-dessus de $\mathbb{P}^n$, en utilisant d'autres méthodes.

Idées de la démonstration :

~~Démonstration (esquisse) : pour~~

(a) $(\text{pt-Approx}^{BM})^{\text{pour } X} \Rightarrow (\text{0cyc}^1\text{-Approx}^{BM})$ pour $X \times \mathbb{P}^1$.

$$\begin{array}{c} X \times \mathbb{P}^1 \\ \downarrow \\ \mathbb{P}^1 \end{array}$$

- méthode de fibration.
- lemme de déplacement pour les 0-cycles

(b) $(\text{0cyc}^1\text{-Approx}^{BM})$ pour $X \times \mathbb{P}^1 \Longrightarrow$ pour X.

- $\operatorname{Br} X \xrightarrow{\simeq} \operatorname{Br}(X \times \mathbb{P}^1)$
- une section trivial de $X \times \mathbb{P}^1 \to X$.

(c) $(\text{0cyc}^1\text{-Approx}^{BM}) \Rightarrow (\text{0cyc}^\delta\text{-Approx}^{BM})$ $\forall \delta \in \mathbb{Z}$

qui concerne les 0-cycles de deg δ.

$$\begin{array}{c} X \times \mathbb{P}^1 \\ \downarrow \\ \mathbb{P}^1 \end{array}$$

- sous-ensemble hilbertien généralisé $Hil \subseteq \mathbb{P}^1$
  + le théorème d'irréductibilité de Hilbert.
- pour contrôler les groupes de Brauer

~~Ep~~

~~$0 \to H^1(\text{Gal}(k$~~

$$(*) \quad 0 \to H^1(k, \operatorname{Pic} \bar{X}) \to \operatorname{Br} X / \operatorname{Br} k \to \operatorname{Br}(\bar{X})^{\operatorname{Gal}(\bar{k}/k)} \to H^2(k, \operatorname{Pic} \bar{X})$$

(provenant de la suite spectrale de Hochschild-Serre)

X : rationnellement connexe $\Rightarrow \begin{cases} \operatorname{Br} \bar{X} : \text{fini} \\ \operatorname{Pic} \bar{X} : \text{sans torsion.} \end{cases}$

$(*) \Rightarrow$.

$\forall\, \theta \in \mathrm{Hil}$. on peut comparer $\mathrm{Br}(\pi^{-1}(\theta))$.

$\pi^{-1}(\theta) \cong X_{k(\theta)}$

(d) $(\mathrm{Ocyc}^{\delta}\text{-}\mathrm{Approx}^{BM})$ pour $X \Rightarrow$ (E) pour X

l'approximation faible considère les places dans un ensemble fini S. Mais (E) concerne toutes les places.

<u>Thm</u>. (Kollár-Szabó) ~~Soit K un corps p-adique ou $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$~~.

Supposons X/k est rationnellement connexe.

Alors pour presque toute place $v \in \Omega_k$

$\deg : CH_0(X_v) \to \mathbb{Z}$ est un isomorphisme.

#.

~~Φ autres~~

~~+ autres arguments dus à~~