代数动力系统中的复杂性

谢俊逸

Univ Rennes, CNRS, IRMAR

2020 年 12 月 30 日

目录

代数动力系统

- 动力系统：关于迭代的学问

代数动力系统

- 动力系统：关于迭代的学问

  例如:
- 拓扑动力系统: $X =$ 拓扑空间，$f: X \to X$ 连续映射。
  f 是否可迁的，是否混合...

- 动力系统：关于迭代的学问

例如:

- 拓扑动力系统: $X =$ 拓扑空间，$f : X \to X$ 连续映射。
  f 是否可迁的, 是否混合...
- 复动力系统: $X =$ 复流形，$f : X \to X$ 全纯映射。
  Julia 集 (= 有混沌的区域) 的形状，是否有游荡 Fatou 域 (=wandering Fatou domain),...

代数动力系统

- 动力系统：关于迭代的学问

  例如:
- 拓扑动力系统: $X =$ 拓扑空间，$f\colon X \to X$ 连续映射。
  f 是否可迁的，是否混合...
- 复动力系统: $X =$ 复流形，$f\colon X \to X$ 全纯映射。
  Julia 集 (= 有混沌的区域) 的形状，是否有游荡 Fatou 域 (=wandering Fatou domain),...
- 非阿基米得动力系统: $X =$ 非阿流形，$f\colon X \to X$ 解析映射。

  ......

$z \mapsto z^2 + c$ 的 Julia 集 (自 M. Astorg 的主页)

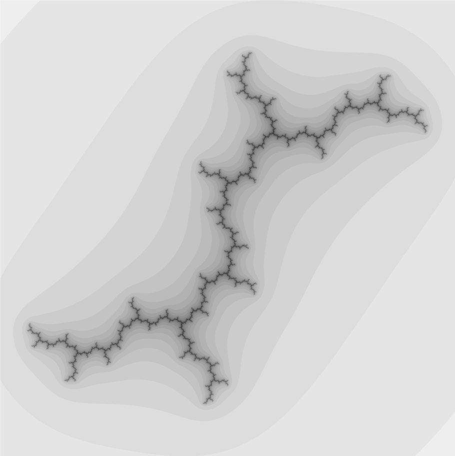

图: c=i

$z \mapsto z^2 + c$ 的 Julia 集 (自 M. Astorg 的主页)

图: c=0.4+0.8i

$z \mapsto z^2 + c$ 的 Julia 集 (自 M. Astorg 的主页)

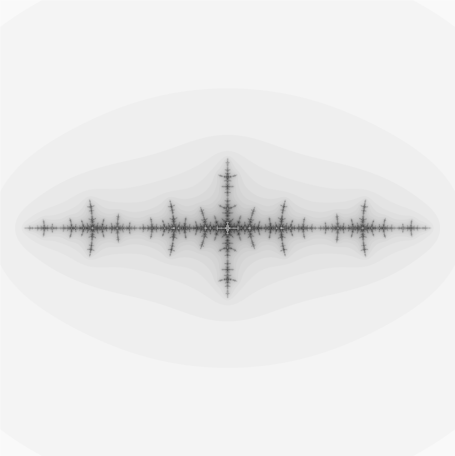

图: c=-1.41...

其它的的 Julia 集 (自 M. Astorg 的主页)

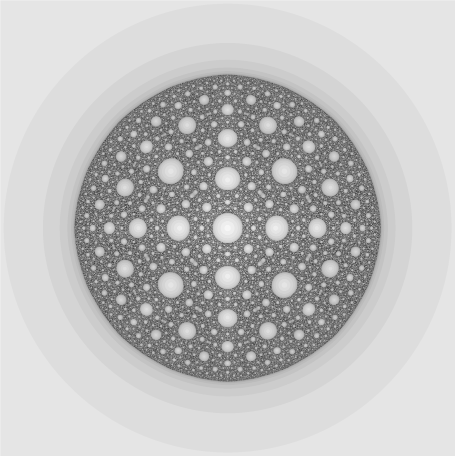

图: $z \mapsto z^2 - 0.01/z^2$

其它的的 Julia 集 (自 M. Astorg 的主页)

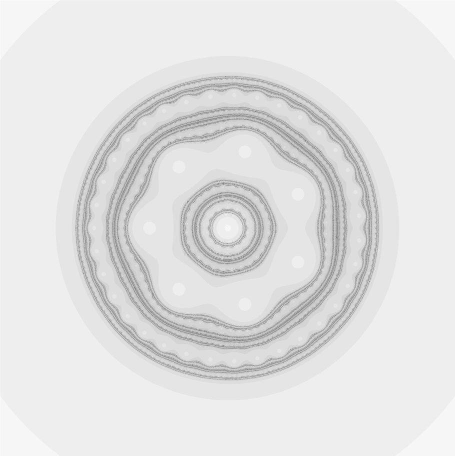

图: $z \mapsto z^5 + 0.01/z^2$

其它的的 Julia 集 (自 M. Astorg 的主页)

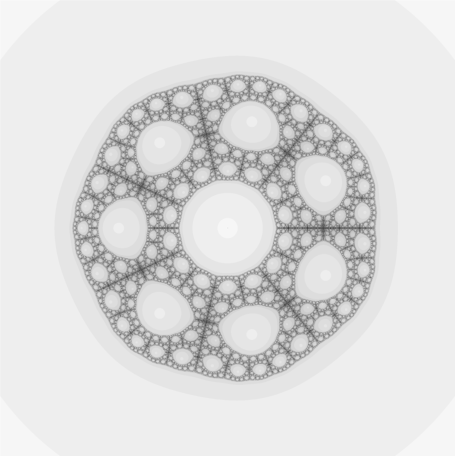

图: $z \mapsto z^5 + 0.1/z^2$

Berkovich 的射影直线 (自 M.Jonsson 的 PPT)

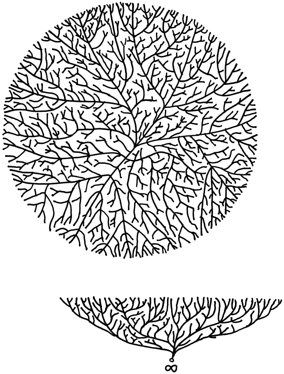

图: $\mathbb{P}^{1,\mathrm{an}}$

代数动力系统

- (较科普的解释) 代数动力系统：研究由多项式定义的动力系统

- (较科普的解释) 代数动力系统：研究由多项式定义的动力系统
- 一个典型的问题：

DML=Dynamical Mordell-Lang 猜想 (弱版本)

令 k 是特征 0 代数闭域 (如 $\mathbb{C}, \overline{\mathbb{Q}}$)。令 $F: k^N \to k^N$ 是 k^N 上的多项式自映射：

$$F: (x_1, \ldots, x_N) \mapsto (F_1(x_1, \ldots, x_N), \ldots, F_N(x_1, \ldots, x_N)), F_i \in k[x_1, \ldots, x_N].$$

令 $P \in k[x_1, \ldots, x_N], p \in k^N$. 则集合 $\{n \geq 0 | \ P(F^n(p)) = 0\}$ 是有限个等差数列的并。

代数动力系统

- (较科普的解释) 代数动力系统：研究由多项式定义的动力系统
- 一个典型的问题：

DML=Dynamical Mordell-Lang 猜想 (弱版本)

令 k 是特征 0 代数闭域 (如 $\mathbb{C}, \overline{\mathbb{Q}}$)。令 $F: k^N \to k^N$ 是 k^N 上的多项式自映射：

$$F: (x_1, \ldots, x_N) \mapsto (F_1(x_1, \ldots, x_N), \ldots, F_N(x_1, \ldots, x_N)), F_i \in k[x_1, \ldots, x_N].$$

令 $P \in k[x_1, \ldots, x_N], p \in k^N$. 则集合 $\{n \geq 0 | \ P(F^n(p)) = 0\}$ 是有限个等差数列的并。

已知的情况：

(Skolem-Mahler-Lech, Bell) $\deg F_i = 1, i = 1, \ldots, N$.

(X.) $k = \overline{\mathbb{Q}}, N = 2$.

DML $\Rightarrow$ 如下关于递推数列的结论:

若 $a_n, n \geq 0$ 满足递推关系

$$a_{n+l} = G(a_n, \ldots, a_{n+l-1}), G \in k[x_0, \ldots, x_{l-1}],$$

则 $\{n \geq 0 |\ a_n = 0\}$ 是有限个等差数列的并。

DML $\Rightarrow$ 如下关于递推数列的结论:

若 $a_n, n \geq 0$ 满足递推关系

$$a_{n+l} = G(a_n, \ldots, a_{n+l-1}), G \in k[x_0, \ldots, x_{l-1}],$$

则 $\{n \geq 0 | \ a_n = 0\}$ 是有限个等差数列的并。

特别的:

- deg $G = 1$ 时，Skolem-Mahler-Lech 定理。
- $k = \overline{\mathbb{Q}}, l = 2$ 时，被 (X.) 推出。

DML $\Rightarrow$ 如下关于递推数列的结论:

若 $a_n, n \geq 0$ 满足递推关系

$$a_{n+l} = G(a_n, \ldots, a_{n+l-1}), G \in k[x_0, \ldots, x_{l-1}],$$

则 $\{n \geq 0 |\ a_n = 0\}$ 是有限个等差数列的并。

特别的:

- $\deg G = 1$ 时，Skolem-Mahler-Lech 定理。
- $k = \overline{\mathbb{Q}}, l = 2$ 时，被 (X.) 推出。

证明.

定义自映射 $F: k^l \to k^l$

$$F: (x_0, \ldots, x_{l-1}) \mapsto (x_1, \ldots, x_{l-1}, G(x_0, \ldots, x_{l-1})).$$

令 $P := x_0$. 应用 DML 即得证。 $\square$

动力系统次数: 1. 代数簇

代数动力系统研究代数簇上的自映射(或更一般的有理自映射) 的迭代。

动力系统次数: 1. 代数簇

代数动力系统研究代数簇上的自映射(或更一般的有理自映射) 的迭代。

- 粗略的说: 代数簇是由多项式定义的空间。

动力系统次数: 1. 代数簇

代数动力系统研究代数簇上的自映射(或更一般的有理自映射) 的迭代。

- 粗略的说: 代数簇是由多项式定义的空间。
  例子: 令 k 是一个代数闭域 (i.e. $\mathbb{C}$, $\overline{\mathbb{Q}}$, $\overline{\mathbb{F}_p}$...)

1. 仿射空间: $X = k^N$, $N \geq 0$.

动力系统次数: 1. 代数簇

代数动力系统研究代数簇上的自映射(或更一般的有理自映射) 的迭代。

- 粗略的说: 代数簇是由多项式定义的空间。
  例子: 令 k 是一个代数闭域 (i.e. $\mathbb{C}$, $\overline{\mathbb{Q}}$, $\overline{\mathbb{F}_p}$...)

1. 仿射空间: $X = k^N$, $N \geq 0$.
2. 马尔可夫曲面: $X = \{(x, y, z) \in k^3 |\ x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz\}$.

动力系统次数: 1. 代数簇

代数动力系统研究代数簇上的自映射(或更一般的有理自映射) 的迭代。

- 粗略的说: 代数簇是由多项式定义的空间。
  例子: 令 k 是一个代数闭域 (i.e. $\mathbb{C}$, $\overline{\mathbb{Q}}$, $\overline{\mathbb{F}_p}$...)

1. 仿射空间: $X = k^N$, $N \geq 0$.
2. 马尔可夫曲面: $X = \{(x, y, z) \in k^3 | \ x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz\}$.
3. 射影空间: $\mathbb{P}^N, N \geq 0$:=" 线性空间 k^{N+1} 中过原点的直线"
   $=(k^{N+1} \setminus \{(0, \dots, 0)\})/(x_0, \dots, x_N) \sim (ax_0, \dots, ax_N), a \in k^*$.

动力系统次数: 1. 代数簇

代数动力系统研究代数簇上的自映射(或更一般的有理自映射) 的迭代。

- 粗略的说: 代数簇是由多项式定义的空间。
  例子: 令 k 是一个代数闭域 (i.e. $\mathbb{C}$, $\overline{\mathbb{Q}}$, $\overline{\mathbb{F}_p}$...)

1. 仿射空间: $X = k^N$, $N \geq 0$.
2. 马尔可夫曲面: $X = \{(x, y, z) \in k^3 |\ x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz\}$.
3. 射影空间: $\mathbb{P}^N, N \geq 0$:=" 线性空间 k^{N+1} 中过原点的直线"
   $=(k^{N+1} \setminus \{(0, \ldots, 0)\})/(x_0, \ldots, x_N) \sim (ax_0, \ldots, ax_N), a \in k^*$.

- $\mathbb{P}^N$ 中的一个点记做 $[x_0 : \cdots : x_N]$, $x_0, \ldots, x_N$ 不全为 0.
  对 $a \neq 0$, $[x_0 : \cdots : x_N] = [ax_0 : \cdots : ax_N]$.

动力系统次数: 1. 代数簇

代数动力系统研究代数簇上的自映射(或更一般的有理自映射) 的迭代。

- 粗略的说: 代数簇是由多项式定义的空间。
  例子: 令 k 是一个代数闭域 (i.e. $\mathbb{C}$, $\overline{\mathbb{Q}}$, $\overline{\mathbb{F}_p}$...)

1. 仿射空间: $X = k^N$, $N \geq 0$.
2. 马尔可夫曲面: $X = \{(x, y, z) \in k^3 |\ x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz\}$.
3. 射影空间: $\mathbb{P}^N, N \geq 0$:=" 线性空间 k^{N+1} 中过原点的直线"
   $=(k^{N+1} \setminus \{(0, \ldots, 0)\})/(x_0, \ldots, x_N) \sim (ax_0, \ldots, ax_N), a \in k^*$.

- $\mathbb{P}^N$ 中的一个点记做 $[x_0 : \cdots : x_N]$, $x_0, \ldots, x_N$ 不全为 0.
  对 $a \neq 0$, $[x_0 : \cdots : x_N] = [ax_0 : \cdots : ax_N]$.

4. $\{[x : y : z] \in \mathbb{P}^2 |, y^2 z = x^3 + axz^2 + bz^3\}, a, b \in k$
   (如果 $4a^3 + 27b^2 \neq 0$, X 是一条椭圆曲线。)

动力系统次数: 1. 代数簇

代数动力系统研究代数簇上的自映射(或更一般的有理自映射) 的迭代。

- 粗略的说: 代数簇是由多项式定义的空间。
  例子: 令 k 是一个代数闭域 (i.e. $\mathbb{C}, \overline{\mathbb{Q}}, \overline{\mathbb{F}_p}$...)

1. 仿射空间: $X = k^N$, $N \geq 0$.
2. 马尔可夫曲面: $X = \{(x, y, z) \in k^3 | \ x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz\}$.
3. 射影空间: $\mathbb{P}^N, N \geq 0$:=" 线性空间 k^{N+1} 中过原点的直线"
   $=(k^{N+1} \setminus \{(0, \ldots, 0)\})/(x_0, \ldots, x_N) \sim (ax_0, \ldots, ax_N), a \in k^*$.

- $\mathbb{P}^N$ 中的一个点记做 $[x_0 : \cdots : x_N]$, $x_0, \ldots, x_N$ 不全为 0.
  对 $a \neq 0$, $[x_0 : \cdots : x_N] = [ax_0 : \cdots : ax_N]$.

4 $\{[x : y : z] \in \mathbb{P}^2 |, y^2 z = x^3 + axz^2 + bz^3\}, a, b \in k$
(如果 $4a^3 + 27b^2 \neq 0$, X 是一条椭圆曲线。)

- (1),(2) 是仿射代数簇; (3), (4) 是射影代数簇。

动力系统次数: 1. 代数簇

代数动力系统研究代数簇上的自映射(或更一般的有理自映射) 的迭代。

- 粗略的说: 代数簇是由多项式定义的空间。
  例子: 令 k 是一个代数闭域 (i.e. $\mathbb{C}$, $\overline{\mathbb{Q}}$, $\overline{\mathbb{F}_p}$...)

1. 仿射空间: $X = k^N$, $N \geq 0$.
2. 马尔可夫曲面: $X = \{(x, y, z) \in k^3 | \ x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz\}$.
3. 射影空间: $\mathbb{P}^N, N \geq 0$:=" 线性空间 k^{N+1} 中过原点的直线"
   $=(k^{N+1} \setminus \{(0, \dots, 0)\})/(x_0, \dots, x_N) \sim (ax_0, \dots, ax_N), a \in k^*$.

- $\mathbb{P}^N$ 中的一个点记做 $[x_0 : \cdots : x_N]$, $x_0, \dots, x_N$ 不全为 0.
  对 $a \neq 0$, $[x_0 : \cdots : x_N] = [ax_0 : \cdots : ax_N]$.

4 $\{[x : y : z] \in \mathbb{P}^2 |, y^2 z = x^3 + axz^2 + bz^3\}, a, b \in k$
  (如果 $4a^3 + 27b^2 \neq 0$, X 是一条椭圆曲线。)

- (1),(2) 是仿射代数簇; (3), (4) 是射影代数簇。
- $k^N \hookrightarrow \mathbb{P}^N$: $(x_1, \dots, x_N) \mapsto [1 : x_1, \dots, x_N]$.
  $\mathbb{P}^N \setminus k^N = \{x_0 = 0\}$. k^N 包含 $\mathbb{P}^N$ 的 “一般点” 。

动力系统次数:2. 自映射与有理自映射

粗略的说：自映射 f 是代数簇到自身的由多项式定义的映射。
如果存在另一个自映射 f^{-1} 是它的逆，那么 f 又被称为自同构。

动力系统次数:2. 自映射与有理自映射

粗略的说：自映射 f 是代数簇到自身的由多项式定义的映射。
如果存在另一个自映射 f^{-1} 是它的逆，那么 f 又被称为自同构。

例子:

- k^N 上的自映射：$F:(x_1,\ldots,x_N)\mapsto (F_1(x_1,\ldots,x_N),\ldots,F_N(x_1,\ldots,x_N)), F_i\in k[x_1,\ldots,x_N]$.
  $\deg F := \max\{\deg F_1,\ldots,\deg F_N\}$.

动力系统次数:2. 自映射与有理自映射

粗略的说：自映射 f 是代数簇到自身的由多项式定义的映射。
如果存在另一个自映射 f^{-1} 是它的逆，那么 f 又被称为自同构。

例子:

- k^N 上的自映射: $F:(x_1,\ldots,x_N)\mapsto (F_1(x_1,\ldots,x_N),\ldots,F_N(x_1,\ldots,x_N)), F_i\in k[x_1,\ldots,x_N]$.
  $\deg F := \max\{\deg F_1,\ldots,\deg F_N\}$.
- (仿射变换) 当 $\deg F\leq 1$ 时，F 可以写成矩阵形式

$$F:\vec{\mathbf{x}}\mapsto A\vec{\mathbf{x}}+\vec{\mathbf{b}}.$$

F 是自同构当且仅当 $\det(A)\neq 0$.

动力系统次数:2. 自映射与有理自映射

粗略的说：自映射 f 是代数簇到自身的由多项式定义的映射。
如果存在另一个自映射 f^{-1} 是它的逆，那么 f 又被称为自同构。

例子:

- k^N 上的自映射：$F:(x_1,\dots,x_N)\mapsto (F_1(x_1,\dots,x_N),\dots,F_N(x_1,\dots,x_N)), F_i\in k[x_1,\dots,x_N]$.
  $\deg F := \max\{\deg F_1,\dots,\deg F_N\}$.
- (仿射变换) 当 $\deg F\leq 1$ 时，F 可以写成矩阵形式
  $$F:\vec{\mathbf{x}}\mapsto A\vec{\mathbf{x}}+\vec{\mathbf{b}}.$$
  F 是自同构当且仅当 $\det(A)\neq 0$.
- (Hénon 变换)：$F:(x,y)\mapsto (y,x+H(y)), H\in k[y]$. 它是 k^2 上的自同构。($\deg F=\max\{\deg H,1\}$.)

动力系统次数:2. 自映射与有理自映射

粗略的说：自映射 f 是代数簇到自身的由多项式定义的映射。
如果存在另一个自映射 f^{-1} 是它的逆，那么 f 又被称为自同构。

例子:

- k^N 上的自映射: $F:(x_1,\dots,x_N)\mapsto (F_1(x_1,\dots,x_N),\dots,F_N(x_1,\dots,x_N)), F_i\in k[x_1,\dots,x_N]$.
  $\deg F := \max\{\deg F_1,\dots,\deg F_N\}$.
- (仿射变换) 当 $\deg F\le 1$ 时，F 可以写成矩阵形式
  $$F:\vec{\mathbf{x}}\mapsto A\vec{\mathbf{x}}+\vec{\mathbf{b}}.$$
  F 是自同构当且仅当 $\det(A)\neq 0$.
- (Hénon 变换): $F:(x,y)\mapsto (y,x+H(y)), H\in k[y]$. 它是 k^2 上的自同构。($\deg F=\max\{\deg H,1\}$.)

Jacobian 猜想 (Keller, 1939)

假设 $k=\mathbb{C}$. F 是自同构当且仅当 $\det(\frac{\partial F_i}{\partial x_j})_{i,j}\in k^*$.

动力系统次数:2. 自映射与有理自映射

有理自映射是推广版的自映射，它是只在” 一般点” 上定义的自映射。

有理自映射是推广版的自映射，它是只在" 一般点" 上定义的自映射。

例子:

- $\mathbb{P}^N$ 上的有理自映射:

$$F:[x_0:\cdots:x_N]\mapsto[F_0(x_0,\ldots,x_N):\cdots:F_N(x_0,\ldots,x_N)]$$

$F_i, 0=1..., N$ 是不全为 0 的相同次数的齐次多项式。

动力系统次数:2. 自映射与有理自映射

有理自映射是推广版的自映射，它是只在" 一般点" 上定义的自映射。

例子:

- $\mathbb{P}^N$ 上的有理自映射:

$$F : [x_0 : \cdots : x_N] \mapsto [F_0(x_0, \ldots, x_N) : \cdots : F_N(x_0, \ldots, x_N)]$$

$F_i, 0 = 1..., N$ 是不全为 0 的相同次数的齐次多项式。

- 对任何非 0 的齐次多项式 G, $[F_0 : \cdots : F_N]$ 和 $[GF_0 : \cdots : GF_N]$. 在" 一般点" 上相同，他们被认为是同一个有理映射。

动力系统次数:2. 自映射与有理自映射

有理自映射是推广版的自映射, 它是只在" 一般点" 上定义的自映射。

例子:

- $\mathbb{P}^N$ 上的有理自映射:

$$F:[x_0:\cdots:x_N]\mapsto[F_0(x_0,\ldots,x_N):\cdots:F_N(x_0,\ldots,x_N)]$$

$F_i, 0=1..., N$ 是不全为 0 的相同次数的齐次多项式。

- 对任何非 0 的齐次多项式 G, $[F_0:\cdots:F_N]$ 和 $[GF_0:\cdots:GF_N]$. 在" 一般点" 上相同，他们被认为是同一个有理映射。
- 通常我们假设 $F_0,\ldots,F_N$ 没有非常数的公因子。

动力系统次数:2. 自映射与有理自映射

有理自映射是推广版的自映射，它是只在" 一般点" 上定义的自映射。

例子:

- $\mathbb{P}^N$ 上的有理自映射:

$$F : [x_0 : \cdots : x_N] \mapsto [F_0(x_0, \ldots, x_N) : \cdots : F_N(x_0, \ldots, x_N)]$$

$F_i, 0 = 1..., N$ 是不全为 0 的相同次数的齐次多项式。

- 对任何非 0 的齐次多项式 G, $[F_0 : \cdots : F_N]$ 和 $[GF_0 : \cdots : GF_N]$. 在" 一般点" 上相同，他们被认为是同一个有理映射。
- 通常我们假设 $F_0, \ldots, F_N$ 没有非常数的公因子。
- 当 $p = [x_0, \ldots, x_N] \in I(F) := \cap_{i=0}^N \{F_i = 0\}$ 时，$F(p)$ 没有定义。
F 是 $\mathbb{P}^N$ 上的自映射当且仅当 $\cap_{i=0}^N \{F_i = 0\} = \emptyset$.

有理自映射是推广版的自映射，它是只在”一般点”上定义的自映射。

例子:

- $\mathbb{P}^N$ 上的有理自映射:

$$F : [x_0 : \cdots : x_N] \mapsto [F_0(x_0, \ldots, x_N) : \cdots : F_N(x_0, \ldots, x_N)]$$

$F_i, 0 = 1..., N$ 是不全为 0 的相同次数的齐次多项式。

- 对任何非 0 的齐次多项式 G, $[F_0 : \cdots : F_N]$ 和 $[GF_0 : \cdots : GF_N]$. 在”一般点”上相同，他们被认为是同一个有理映射。
- 通常我们假设 $F_0, \ldots, F_N$ 没有非常数的公因子。
- 当 $p = [x_0, \ldots, x_N] \in I(F) := \cap_{i=0}^N \{F_i = 0\}$ 时，$F(p)$ 没有定义。
  F 是 $\mathbb{P}^N$ 上的自映射当且仅当 $\cap_{i=0}^N \{F_i = 0\} = \emptyset$.
- $\deg F := \deg F_i$.

动力系统次数:2. 自映射与有理自映射

通过 $k^N \simeq \{x_0 \neq 0\} \subseteq \mathbb{P}^N$, k^N 上的自映射可以看成 $\mathbb{P}^N$ 上的有理映射:

动力系统次数:2. 自映射与有理自映射

通过 $k^N \simeq \{x_0 \neq 0\} \subseteq \mathbb{P}^N$, k^N 上的自映射可以看成 $\mathbb{P}^N$ 上的有理映射:

- $$F:(x_1,\dots,x_N)\mapsto (F_1(x_1,\dots,x_N),\dots,F_N(x_1,\dots,x_N))$$

  $\deg F = d$, 可以看成

  $$\overline{F}:F:[x_0:\dots:x_N]\mapsto [x_0^d:\overline{F_1}(x_0,\dots,x_N):\dots:\overline{F_N}(x_0,\dots,x_N)]$$

  其中

  $$\overline{F_i}(x_0,\dots,x_N):=x_0^dF_i(x_1/x_0,\dots,x_N/x_N)$$

  是 d 次的齐次多项式.

动力系统次数:2. 自映射与有理自映射

通过 $k^N \simeq \{x_0 \neq 0\} \subseteq \mathbb{P}^N$, k^N 上的自映射可以看成 $\mathbb{P}^N$ 上的有理映射:

- $$F : (x_1, \dots, x_N) \mapsto (F_1(x_1, \dots, x_N), \dots, F_N(x_1, \dots, x_N))$$

  $\deg F = d$, 可以看成

  $$\overline{F} : F : [x_0 : \dots : x_N] \mapsto [x_0^d : \overline{F_1}(x_0, \dots, x_N) : \dots : \overline{F_N}(x_0, \dots, x_N)]$$

  其中
  $$\overline{F_i}(x_0, \dots, x_N) := x_0^d F_i(x_1/x_0, \dots, x_N/x_N)$$
  是 d 次的齐次多项式.
- 注意到 $x_0^d, \overline{F_1}, \dots, \overline{F_N}$ 没有非常数公因子。所以 $\deg F = \deg \overline{F}$.

动力系统次数:2. 自映射与有理自映射

通过 $k^N \simeq \{x_0 \neq 0\} \subseteq \mathbb{P}^N$, k^N 上的自映射可以看成 $\mathbb{P}^N$ 上的有理映射:

- $$F : (x_1, \ldots, x_N) \mapsto (F_1(x_1, \ldots, x_N), \ldots, F_N(x_1, \ldots, x_N))$$

  $\deg F = d$, 可以看成

  $$\overline{F} : F : [x_0 : \cdots : x_N] \mapsto [x_0^d : \overline{F_1}(x_0, \ldots, x_N) : \cdots : \overline{F_N}(x_0, \ldots, x_N)]$$

  其中

  $$\overline{F_i}(x_0, \ldots, x_N) := x_0^d F_i(x_1/x_0, \ldots, x_N/x_N)$$

  是 d 次的齐次多项式.
- 注意到 $x_0^d, \overline{F_1}, \ldots, \overline{F_N}$ 没有非常数公因子。所以 $\deg F = \deg \overline{F}$.
- 例子: $F : (x_1, \ldots, x_N) \to (x_1^d, \ldots, x_N^d)$ 看成
  $\overline{F} : [x_0 : \cdots : x_N] \to [x_0^d, \ldots, x_N^d]$. 有 $I(\overline{F}) = \emptyset$.

动力系统次数:2. 自映射与有理自映射

通过 $k^N \simeq \{x_0 \neq 0\} \subseteq \mathbb{P}^N$, k^N 上的自映射可以看成 $\mathbb{P}^N$ 上的有理映射:

- $$F : (x_1, \ldots, x_N) \mapsto (F_1(x_1, \ldots, x_N), \ldots, F_N(x_1, \ldots, x_N))$$

  $\deg F = d$, 可以看成

  $$\overline{F} : F : [x_0 : \cdots : x_N] \mapsto [x_0^d : \overline{F_1}(x_0, \ldots, x_N) : \cdots : \overline{F_N}(x_0, \ldots, x_N)]$$

  其中

  $$\overline{F_i}(x_0, \ldots, x_N) := x_0^d F_i(x_1/x_0, \ldots, x_N/x_N)$$

  是 d 次的齐次多项式.
- 注意到 $x_0^d, \overline{F_1}, \ldots, \overline{F_N}$ 没有非常数公因子。所以 $\deg F = \deg \overline{F}$.
- 例子: $F : (x_1, \ldots, x_N) \to (x_1^d, \ldots, x_N^d)$ 看成
  $\overline{F} : [x_0 : \cdots : x_N] \to [x_0^d, \ldots, x_N^d]$. 有 $I(\overline{F}) = \emptyset$.
- $F : (x_1, x_2) \mapsto (x_2, x_1 + x_2^2)$ 看成
  $\overline{F} : [x_0 : x_1 : x_2] \mapsto [x_0^2 : x_2 x_0 : x_0 x_1 + x_2^2]$. 有 $I(\overline{F}) = \{[0 : 1 : 0]\}$.

动力系统次数:3. 其它例子

- 椭圆曲线的群结构和 $\times 2$ 映射。
  $X = \{[x:y:z] \in \mathbb{P}^2 |, y^2 z = x^3 + axz^2 + bz^3\}, a, b \in k, 4a^3 + 27b^2 \neq 0.$

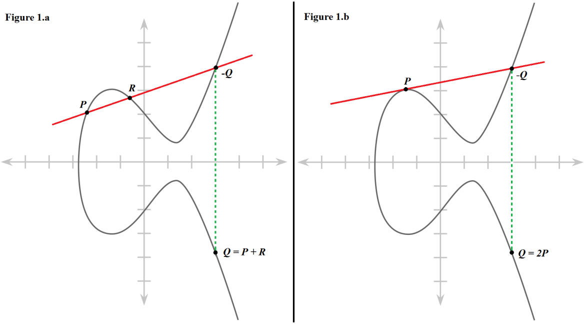

图: 来自网络, 作者 Tania Martin

动力系统次数:3. 其它例子

- 马尔可夫曲面 $X = \{(x, y, z) \in k^3 |\ x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz\}$.

动力系统次数:3. 其它例子

- 马尔可夫曲面 $X = \{(x, y, z) \in k^3 |\ x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz\}$.
  交换坐标: $S_3 \curvearrowright X$ 如 $(x, y, z) \mapsto (y, z, x)$.

动力系统次数:3. 其它例子

- 马尔可夫曲面 $X = \{(x,y,z) \in k^3 |\ x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz\}$.
  交换坐标: $S_3 \curvearrowright X$ 如 $(x,y,z) \mapsto (y,z,x)$.
  韦达兑换: $R_3 : (x,y,z) \mapsto (x,y,3xy - z)$.
  (交换 $t^2 - 3xyt + (x^2 + y^2) = 0$ 的两个根。)
  可以类似定义 R_1, R_2.

动力系统次数:3. 其它例子

- 马尔可夫曲面 $X = \{(x, y, z) \in k^3 |\ x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz\}$.

  交换坐标: $S_3 \curvearrowright X$ 如 $(x, y, z) \mapsto (y, z, x)$.

  韦达兑换: $R_3 : (x, y, z) \mapsto (x, y, 3xy - z)$.

  (交换 $t^2 - 3xyt + (x^2 + y^2) = 0$ 的两个根。)

  可以类似定义 R_1, R_2.

  R_1, R_2, R_3, S_3 共同生成一个无限群 G 作用在 X 上。

动力系统次数:3. 其它例子

- 马尔可夫曲面 $X = \{(x, y, z) \in k^3 |\ x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz\}$.
  交换坐标: $S_3 \curvearrowright X$ 如 $(x, y, z) \mapsto (y, z, x)$.
  韦达兑换: $R_3 : (x, y, z) \mapsto (x, y, 3xy - z)$.
  (交换 $t^2 - 3xyt + (x^2 + y^2) = 0$ 的两个根。)
  可以类似定义 R_1, R_2.

  R_1, R_2, R_3, S_3 共同生成一个无限群 G 作用在 X 上。
- 假设 $k = \mathbb{C}$, $X(\mathbb{Z}_{>0}) = G.(1, 1, 1)$.
  马尔可夫数:
  $\mathcal{M} = \{X(\mathbb{Z}_{>0})$里点的坐标$\} = \{1, 2, 5, 13, 29, 34, 89, 169, 194, ...\}$.

动力系统次数:3. 其它例子

- 马尔可夫曲面 $X = \{(x, y, z) \in k^3 |\ x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz\}$.
  交换坐标: $S_3 \curvearrowright X$ 如 $(x, y, z) \mapsto (y, z, x)$.
  韦达兑换: $R_3 : (x, y, z) \mapsto (x, y, 3xy - z)$.
  (交换 $t^2 - 3xyt + (x^2 + y^2) = 0$ 的两个根。)
  可以类似定义 R_1, R_2.
  R_1, R_2, R_3, S_3 共同生成一个无限群 G 作用在 X 上。
- 假设 $k = \mathbb{C}$, $X(\mathbb{Z}_{>0}) = G.(1, 1, 1)$.
  马尔可夫数:
  $\mathcal{M} = \{X(\mathbb{Z}_{>0})$里点的坐标$\} = \{1, 2, 5, 13, 29, 34, 89, 169, 194, ...\}$.
- $\mathcal{M}^s = \{X(\mathbb{Z}_{>0})$里点的**最大**坐标$\} \subseteq \mathcal{M}$.

Frobenius uniqueness 猜想 (Frobenius, 1913)

$$\mathcal{M}^s = \mathcal{M}.$$

动力系统次数:4. 次数序列

如果 F 是 k^N 上的自映射，或更一般的 $\mathbb{P}^N$ 上的有理映射。我们可以考察 F 的次数序列:

$$\deg F^0 = \deg(\mathrm{id}) = 1, \deg F, \deg F^2, \ldots$$

这里 $F^i = F \circ F \circ \cdots \circ F$ 是 F 的 i 次迭代。
(事实上对任何代数簇上的有理自映射，我们都可以考察它的次数增长序列.)

动力系统次数:4. 次数序列

如果 F 是 k^N 上的自映射，或更一般的 $\mathbb{P}^N$ 上的有理映射。我们可以考察 F 的次数序列:

$$\deg F^0 = \deg(\mathrm{id}) = 1, \deg F, \deg F^2, \ldots$$

这里 $F^i = F \circ F \circ \cdots \circ F$ 是 F 的 i 次迭代。
(事实上对任何代数簇上的有理自映射，我们都可以考察它的次数增长序列.)

例子:

- 对任何 $\mathbb{P}^N$ 上的自映射 F, $\deg F^n = (\deg F)^n$. 指数增长。

动力系统次数:4. 次数序列

如果 F 是 k^N 上的自映射，或更一般的 $\mathbb{P}^N$ 上的有理映射。我们可以考察 F 的次数序列:

$$\deg F^0 = \deg(\mathrm{id}) = 1, \deg F, \deg F^2, \ldots$$

这里 $F^i = F \circ F \circ \cdots \circ F$ 是 F 的 i 次迭代。
(事实上对任何代数簇上的有理自映射，我们都可以考察它的次数增长序列.)

例子:

- 对任何 $\mathbb{P}^N$ 上的自映射 F, $\deg F^n = (\deg F)^n$. 指数增长。
- (Cremona 对换) $F : [x : y : z] \mapsto [yz : xz : xy]$. $\deg F = 2$.

$$F^2([x : y : z]) = F([yz : xz : xy]) = [x^2zy : xy^2z : xyz^2] = [x : y : z].$$

$\deg F^2 = 1$. $I(F) = \{[1 : 0 : 0], [0 : 1 : 0], [0 : 0 : 1]\}$.
次数序列: $1, 2, 1, 2, 1, \ldots$ 有界.

动力系统次数:4. 次数序列

如果 F 是 k^N 上的自映射，或更一般的 $\mathbb{P}^N$ 上的有理映射。我们可以考察 F 的次数序列:

$$\deg F^0 = \deg(\mathrm{id}) = 1, \deg F, \deg F^2, \ldots$$

这里 $F^i = F \circ F \circ \cdots \circ F$ 是 F 的 i 次迭代。
(事实上对任何代数簇上的有理自映射，我们都可以考察它的次数增长序列.)

例子:

- 对任何 $\mathbb{P}^N$ 上的自映射 F, $\deg F^n = (\deg F)^n$. 指数增长。
- (Cremona 对换) $F : [x : y : z] \mapsto [yz : xz : xy]$. $\deg F = 2$.

$$F^2([x : y : z]) = F([yz : xz : xy]) = [x^2zy : xy^2z : xyz^2] = [x : y : z].$$

$\deg F^2 = 1$. $I(F) = \{[1 : 0 : 0], [0 : 1 : 0], [0 : 0 : 1]\}$.
次数序列: $1, 2, 1, 2, 1, \ldots$ 有界.

- Hénon 映射 $F : (x, y) \mapsto (y, x + G(y)), \deg G = d \geq 2$. $\deg F^n = d^n$. 指数增长. 注意到 F 是 k^2 上自同构。延拓到 $\mathbb{P}^2$ 上 $I(\overline{F}) = \{[0 : 1 : 0]\}$.

动力系统次数:4. 次数序列

- $(x, y) \mapsto (xy, x)$, 次数序列 $=1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$ = 斐波那契数列 $\sim (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n$。指数增长。
- $F : (x, y) \mapsto (x, xy)$, $\deg F^n = n + 1$, 线性增长。

动力系统次数:4. 次数序列

- $(x,y)\mapsto(xy,x)$, 次数序列 $=1,2,3,5,8,13,\dots$ = 斐波那契数列 $\sim(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n$。指数增长。
- $F:(x,y)\mapsto(x,xy)$, $\deg F^n=n+1$, 线性增长。
- $(x_1,x_2,\dots,x_N)\mapsto(x_1,x_1x_2,x_2x_3,\dots,x_{N-1}x_N)$.
  $\deg F^n\sim c(N-1)^n, c>0$. 多项式增长。

动力系统次数:4. 次数序列

- $(x,y)\mapsto(xy,x)$, 次数序列 $=1,2,3,5,8,13,\ldots$ = 斐波那契数列 $\sim(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n$。指数增长。
- $F:(x,y)\mapsto(x,xy)$, $\deg F^n=n+1$, 线性增长。
- $(x_1,x_2,\ldots,x_N)\mapsto(x_1,x_1x_2,x_2x_3,\ldots,x_{N-1}x_N)$. $\deg F^n\sim c(N-1)^n, c>0$. 多项式增长。
- $(x_1,x_2)\mapsto(x_1^2,x_1x_2^2)$. $\deg F^n\sim\frac{1}{2}n2^n$. 指数增长。

动力系统次数:4. 次数序列

- $(x, y) \mapsto (xy, x)$, 次数序列 $= 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$ = 斐波那契数列 $\sim (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n$。指数增长。
- $F : (x, y) \mapsto (x, xy)$, $\deg F^n = n + 1$, 线性增长。
- $(x_1, x_2, \ldots, x_N) \mapsto (x_1, x_1x_2, x_2x_3, \ldots, x_{N-1}x_N)$. $\deg F^n \sim c(N-1)^n, c > 0$. 多项式增长。
- $(x_1, x_2) \mapsto (x_1^2, x_1x_2^2)$. $\deg F^n \sim \frac{1}{2}n2^n$. 指数增长。

  所有例子中增长速度不超过指数。

动力系统次数:4. 次数序列

- $(x,y)\mapsto(xy,x)$, 次数序列 $=1,2,3,5,8,13,\dots$ = 斐波那契数列 $\sim(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n$。指数增长。
- $F:(x,y)\mapsto(x,xy)$, $\deg F^n=n+1$, 线性增长。
- $(x_1,x_2,\dots,x_N)\mapsto(x_1,x_1x_2,x_2x_3,\dots,x_{N-1}x_N)$. $\deg F^n\sim c(N-1)^n, c>0$. 多项式增长。
- $(x_1,x_2)\mapsto(x_1^2,x_1x_2^2)$. $\deg F^n\sim\frac{1}{2}n2^n$. 指数增长。

  所有例子中增长速度不超过指数。

性质-定义 (Russakovskii, Shiffman, Dinh, Sibony, Dang, Truong...)

极限 $\lambda_1(F):=\lim_{n\to\infty}\deg(F^n)^{1/n}\geq 1$ 存在。它被称为 F 的一阶动力系统次数。

动力系统次数:4. 次数序列

- $(x, y) \mapsto (xy, x)$, 次数序列 $=1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$ = 斐波那契数列 $\sim (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n$。指数增长。
- $F : (x, y) \mapsto (x, xy)$, $\deg F^n = n + 1$, 线性增长。
- $(x_1, x_2, \ldots, x_N) \mapsto (x_1, x_1x_2, x_2x_3, \ldots, x_{N-1}x_N)$. $\deg F^n \sim c(N-1)^n, c > 0$. 多项式增长。
- $(x_1, x_2) \mapsto (x_1^2, x_1x_2^2)$. $\deg F^n \sim \frac{1}{2}n2^n$. 指数增长。

  所有例子中增长速度不超过指数。

性质-定义 (Russakovskii, Shiffman, Dinh, Sibony, Dang, Truong...)

极限 $\lambda_1(F) := \lim_{n\to\infty} \deg(F^n)^{1/n} \geq 1$ 存在。它被称为 F 的一阶动力系统次数。

- 通过相交理论还可以定义高阶动力系统次数 $\lambda_1, \ldots, \lambda_d \geq 1, d = \dim X$. 他们是动力系统的内蕴不变量。满足 $\lambda_i(F^n) = \lambda_i(F)^n$, 指数凹性: $\lambda_i^2 \geq \lambda_{i-1}\lambda_{i+1}$.

动力系统次数:5. 一些问题

问题 (Viallet, 2008)

是否对所有有理自映射 F, $\lambda_1(F)$ 是代数数?

动力系统次数:5. 一些问题

问题 (Viallet, 2008)

是否对所有有理自映射 F, $\lambda_1(F)$ 是代数数?

已知结果:

- 二维双有理映射: 是 (Diller-Favre)

动力系统次数:5. 一些问题

问题 (Viallet, 2008)

是否对所有有理自映射 F, $\lambda_1(F)$ 是代数数?

已知结果:

- 二维双有理映射: 是 (Diller-Favre)
- k^2 上自映射: 是 (Favre-Jonsson)

问题 (Viallet, 2008)

是否对所有有理自映射 F, $\lambda_1(F)$ 是代数数?

已知结果:

- 二维双有理映射: 是 (Diller-Favre)
- k^2 上自映射: 是 (Favre-Jonsson)
- k^3 上自同构: 是 (Dang-Favre, 2020)

问题 (Viallet, 2008)

是否对所有有理自映射 F, $\lambda_1(F)$ 是代数数?

已知结果:

- 二维双有理映射: 是 (Diller-Favre)
- k^2 上自映射: 是 (Favre-Jonsson)
- k^3 上自同构: 是 (Dang-Favre, 2020)
- 单项式映射，射影空间上自映射...: 是

动力系统次数:5. 一些问题

问题 (Viallet, 2008)

是否对所有有理自映射 F, $\lambda_1(F)$ 是代数数?

已知结果:

- 二维双有理映射: 是 (Diller-Favre)
- k^2 上自映射: 是 (Favre-Jonsson)
- k^3 上自同构: 是 (Dang-Favre, 2020)
- 单项式映射，射影空间上自映射...: 是
- $\mathbb{P}^2$ 上有理映射: 否!

定理 (Bell-Diller-Jonsson, 2019)

令 $G_{a,b} : (x, y) \mapsto (x^a y^b, x^{-b} y^a)$, $a, b \in \mathbb{Z}$, $(a + bi)^n \notin \mathbb{R}$ (如: $a = 1, b = 2$)
$\sigma : [x : y : z] \mapsto [x_0(x_0 - x_1 - x_2) : x_1(-x_0 + x_1 - x_2) : x_2(-x_0 - x_1 + x_2)]$.
令 $F_{a,b} := G_{a,b} \circ \sigma$, 则 $\lambda_1(F_{a,b})$ 是超越数。

动力系统次数:5. 一些问题

猜想 (Dang-Favre,2020)

若 F 是 k^N 上自映射, $\lambda_1(F)$ 是至多 N 次的代数数。

动力系统次数:5. 一些问题

猜想 (Dang-Favre,2020)

若 F 是 k^N 上自映射, $\lambda_1(F)$ 是至多 N 次的代数数。

- 已知: $N = 2$ (Favre-Jonsson) , $\lambda_1(F)^2 > \lambda_2(F)$ (Dang-Favre, 2020)

动力系统次数:5. 一些问题

猜想 (Dang-Favre,2020)

若 F 是 k^N 上自映射, $\lambda_1(F)$ 是至多 N 次的代数数。

- 已知: $N=2$ (Favre-Jonsson) , $\lambda_1(F)^2 > \lambda_2(F)$ (Dang-Favre, 2020)

问题

能否描述次数序列的渐进类型。如是否总是形如 $\lambda_1^n n^l, l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.
弱一些的问题，若 $\deg(F^n)$ 无界，它最小以怎样的速度增长? (如: 是否至少线性?)

动力系统次数:5. 一些问题

猜想 (Dang-Favre,2020)

若 F 是 k^N 上自映射, $\lambda_1(F)$ 是至多 N 次的代数数。

- 已知: $N = 2$ (Favre-Jonsson) , $\lambda_1(F)^2 > \lambda_2(F)$ (Dang-Favre, 2020)

问题

能否描述次数序列的渐进类型。如是否总是形如 $\lambda_1^n n^l, l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.
弱一些的问题，若 $\deg(F^n)$ 无界，它最小以怎样的速度增长? (如: 是否至少线性?)

- (Cantat-X.): 特征 0 时, 若 $\deg(F^n)$ 无界则 $\deg(F^n) \to \infty$.

动力系统次数:5. 一些问题

猜想 (Dang-Favre,2020)

若 F 是 k^N 上自映射, $\lambda_1(F)$ 是至多 N 次的代数数。

- 已知: $N=2$ (Favre-Jonsson) , $\lambda_1(F)^2>\lambda_2(F)$ (Dang-Favre, 2020)

问题

能否描述次数序列的渐进类型。如是否总是形如 $\lambda_1^n n^l, l\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$.
弱一些的问题，若 $\deg(F^n)$ 无界，它最小以怎样的速度增长? (如: 是否至少线性?)

- (Cantat-X.): 特征 0 时, 若 $\deg(F^n)$ 无界则 $\deg(F^n)\to\infty$.
- (Cantat-X.): 对 $N,d\geq 1$, 存在一个具体的数列 $D(N,d,n)$ 单调趋于无穷，使得对任意 $F:\mathbb{P}^N\to\mathbb{P}^N$, $\deg F=d$, 若 $\deg F^n$ 无界, 则 $\max\{\deg F,\dots,\deg F^n\}\geq D(N,d,n)$ $\forall n$.

动力系统次数:6. 一些问题

- 2 维时, $\deg F^n$ 有界，线性，二次或 $\lambda_1(F) > 0$.

动力系统次数:6. 一些问题

- 2 维时, $\deg F^n$ 有界，线性，二次或 $\lambda_1(F) > 0$.
- 对任意维数的多项式映射，我们有如下结果。

定理 (Urech, 2017)

对 $F: k^N \to k^N$, 若 $\deg F^n$ 无界，则对任何 $M \geq 0$,

$$\#\{n \geq 0 | \ \deg(F^n) \leq M\} \leq N\binom{N+M}{M} \leq C_N M^N,$$

$C_N = \frac{(1+N)^N}{(N-1)!}$. 特别的

$$\max\{1, \deg F, \ldots, \deg F^n\} \geq C_N^{-1}(n+1)^{1/N}.$$

Urech 的定理的证明.

- 令 $\mathrm{End}(k^N) = k[x_1, \ldots, x_N]^N$ 为所有 k^N 上自映射组成的线性空间.

$\square$

Urech 的定理的证明.

- 令 $\mathrm{End}(k^N) = k[x_1, \ldots, x_N]^N$ 为所有 k^N 上自映射组成的线性空间.
- 对 $M \geq 0$, 令
$\mathrm{End}(k^N)_M = k[x_1, \ldots, x_N]^N_M = \{G \in \mathrm{End}(k^N) | \deg G \leq M\}$.

□

动力系统次数:6. Urech 的定理

Urech 的定理的证明.

- 令 $\mathrm{End}(k^N) = k[x_1, \ldots, x_N]^N$ 为所有 k^N 上自映射组成的线性空间.
- 对 $M \geq 0$, 令
  $\mathrm{End}(k^N)_M = k[x_1, \ldots, x_N]_M^N = \{G \in \mathrm{End}(k^N) |\ \deg G \leq M\}$.
- 注意到, 对 $F_1, F_2, F_3 \in \mathrm{End}(k^N)$, $(F_1 + F_2) \circ F_3 = F_1 \circ F_3 + F_2 \circ F_3$.

$\square$

Urech 的定理的证明.

- 令 $\mathrm{End}(k^N) = k[x_1, \dots, x_N]^N$ 为所有 k^N 上自映射组成的线性空间.
- 对 $M \geq 0$, 令
  $\mathrm{End}(k^N)_M = k[x_1, \dots, x_N]^N_M = \{G \in \mathrm{End}(k^N) |\ \deg G \leq M\}$.
- 注意到, 对 $F_1, F_2, F_3 \in \mathrm{End}(k^N)$, $(F_1 + F_2) \circ F_3 = F_1 \circ F_3 + F_2 \circ F_3$.
- 若 $\deg F^n$ 无界, 则 $F^i, i \geq 0 \in \mathrm{End}(k^N)$, 线性无关。否则, 若
  $F^l = \sum_{i=0}^{l-1} a_i F^i$, 则 $< F^i, i \geq 0 >$ 被 $F^i, 0 \leq i \leq l-1$ 生成。如:

$$F^{l+1} = (\sum_{i=0}^{l-1} a_i F^i) \circ F = \sum_{i=1}^{i-1} a_{i-1} F^i + a_{l-1} F^l = \sum_{i=1}^{i-1} a_{i-1} F^i + a_{l-1} \sum_{i=0}^{l-1} a_i F^i.$$

与 $\deg F^n$ 无界矛盾。

□

Urech 的定理的证明.

- 令 $\mathrm{End}(k^N) = k[x_1, \ldots, x_N]^N$ 为所有 k^N 上自映射组成的线性空间.
- 对 $M \geq 0$, 令
  $\mathrm{End}(k^N)_M = k[x_1, \ldots, x_N]^N_M = \{G \in \mathrm{End}(k^N) |\ \deg G \leq M\}$.
- 注意到, 对 $F_1, F_2, F_3 \in \mathrm{End}(k^N)$, $(F_1 + F_2) \circ F_3 = F_1 \circ F_3 + F_2 \circ F_3$.
- 若 $\deg F^n$ 无界, 则 $F^i, i \geq 0 \in \mathrm{End}(k^N)$, 线性无关。否则, 若 $F^l = \sum_{i=0}^{l-1} a_i F^i$, 则 $< F^i, i \geq 0 >$ 被 $F^i, 0 \leq i \leq l-1$ 生成。如:

$$F^{l+1} = (\sum_{i=0}^{l-1} a_i F^i) \circ F = \sum_{i=1}^{i-1} a_{i-1} F^i + a_{l-1} F^l = \sum_{i=1}^{i-1} a_{i-1} F^i + a_{l-1} \sum_{i=0}^{l-1} a_i F^i.$$

  与 $\deg F^n$ 无界矛盾。
- 所以 $\#(\{F^i, i \geq 0\} \cap \mathrm{End}(k^N)_M) \leq \dim \mathrm{End}(k^N)_M = N\binom{N+M}{M}$.

□

拓扑与算术复杂性:1. 拓扑熵

假设 $k = \mathbb{C}$, X 是光滑射影代数簇 (如: $X = \mathbb{P}^N$), $F : X \to X$ 是自映射。这时 X 看成一个复流形, (X, F) 是一个复动力系统。特别的，它也是一个拓扑动力系统。对一个拓扑动力系统，通常用拓扑熵来描述它的复杂性:

- 对任何 X 的有限开覆盖 $\mathcal{U} = \{U_i, i \in I\}$, 令 $H(\mathcal{U}) := \log(\min\{\#J|\ J \subseteq I, X \subseteq \cup_{i\in J} U_i\})$.

拓扑与算术复杂性:1. 拓扑熵

假设 $k=\mathbb{C}$, X 是光滑射影代数簇 (如: $X=\mathbb{P}^N$), $F: X\to X$ 是自映射。这时 X 看成一个复流形, (X,F) 是一个复动力系统。特别的，它也是一个拓扑动力系统。对一个拓扑动力系统，通常用拓扑熵来描述它的复杂性:

- 对任何 X 的有限开覆盖 $\mathcal{U}=\{U_i, i\in I\}$, 令 $H(\mathcal{U}):=\log(\min\{\#J|\ J\subseteq I, X\subseteq \cup_{i\in J}U_i\})$.
- $h(F,\mathcal{U}):=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}H(\mathcal{U}\vee F^{-1}(\mathcal{U})\vee\cdots\vee F^{-n+1}(\mathcal{U}))$. (记号: $F^{-1}(\mathcal{U})=\{F^{-1}(U_i), i\in I\}, \mathcal{U}\vee\mathcal{V}=\{U_i\cap V_j|\ i\in I, j\in J\}$.)

拓扑与算术复杂性:1. 拓扑熵

假设 $k=\mathbb{C}$, X 是光滑射影代数簇 (如: $X=\mathbb{P}^N$), $F: X\to X$ 是自映射。这时 X 看成一个复流形, (X,F) 是一个复动力系统。特别的，它也是一个拓扑动力系统。对一个拓扑动力系统，通常用拓扑熵来描述它的复杂性:

- 对任何 X 的有限开覆盖 $\mathcal{U}=\{U_i, i\in I\}$, 令 $H(\mathcal{U}):=\log(\min\{\#J|\ J\subseteq I, X\subseteq \cup_{i\in J}U_i\})$.
- $h(F,\mathcal{U}):=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}H(\mathcal{U}\vee F^{-1}(\mathcal{U})\vee\cdots\vee F^{-n+1}(\mathcal{U}))$. (记号: $F^{-1}(\mathcal{U})=\{F^{-1}(U_i), i\in I\}, \mathcal{U}\vee\mathcal{V}=\{U_i\cap V_j|\ i\in I, j\in J\}$.)
- $h_{top}(F):=\sup_{\mathcal{U}} h(F,\mathcal{U})\in[0,+\infty]$, 这里 $\mathcal{U}$ 取遍 X 有限开覆盖。

拓扑与算术复杂性:1. 拓扑熵

假设 $k=\mathbb{C}$, X 是光滑射影代数簇 (如: $X=\mathbb{P}^N$), $F: X\to X$ 是自映射。这时 X 看成一个复流形, (X,F) 是一个复动力系统。特别的，它也是一个拓扑动力系统。对一个拓扑动力系统，通常用拓扑熵来描述它的复杂性:

- 对任何 X 的有限开覆盖 $\mathcal{U}=\{U_i, i\in I\}$, 令 $H(\mathcal{U}):=\log(\min\{\#J|\ J\subseteq I, X\subseteq \cup_{i\in J}U_i\})$.
- $h(F,\mathcal{U}):=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}H(\mathcal{U}\vee F^{-1}(\mathcal{U})\vee\cdots\vee F^{-n+1}(\mathcal{U}))$. (记号: $F^{-1}(\mathcal{U})=\{F^{-1}(U_i), i\in I\}, \mathcal{U}\vee\mathcal{V}=\{U_i\cap V_j|\ i\in I, j\in J\}$.)
- $h_{top}(F):=\sup_{\mathcal{U}} h(F,\mathcal{U})\in[0,+\infty]$, 这里 $\mathcal{U}$ 取遍 X 有限开覆盖。

定理 (Gromov-Yomdin)

若 $F: X\to X$ 是光滑射影复代数簇 (或更一般的: 紧凯莱流形) 上的自映射。

$$h_{top}(F)=\log\rho(F^*)=\log\max\{\lambda_i(F), i=1,\dots,\dim X\}.$$

其中 $\rho(F^*)$ 是 F 在 X 的上同调群 $H^\bullet(X)$ 上作用 F^* 的谱。
特别的, 若 $X=\mathbb{P}^N$, $h_{top}(F)=(\deg F)^N$.

拓扑与算术复杂性:2. 高度与算术次数

假设 $k=\overline{\mathbb{Q}}$, X 是 (拟) 射影代数簇 (如: $X=\mathbb{P}^N, k^N$), 我们通常用**高度**来描述 X 中点的复杂性。高度是一个函数 $h: X\to\mathbb{R}$, $h(x)$ 越高，代表 x 越复杂。

例子:

拓扑与算术复杂性:2. 高度与算术次数

假设 $k=\overline{\mathbb{Q}}$, X 是 (拟) 射影代数簇 (如: $X=\mathbb{P}^N, k^N$), 我们通常用高度来描述 X 中点的复杂性。高度是一个函数 $h: X\to\mathbb{R}$, $h(x)$ 越高，代表 x 越复杂。

例子:

- $X=k^N$. 对 $x:=(x_1,\ldots,x_N)\in\mathbb{Q}^N\subseteq k^N$,
  把 x_i 写成 $x_i=p_i/q_i, p_i,q_i\in\mathbb{Z},(p_i,q_i)=1$,
  则 $h(x)=\log(\max\{|p_i|,|q_i|, i=1,\ldots,N\})$.

拓扑与算术复杂性:2. 高度与算术次数

假设 $k=\overline{\mathbb{Q}}$, X 是 (拟) 射影代数簇 (如: $X=\mathbb{P}^N, k^N$), 我们通常用高度来描述 X 中点的复杂性。高度是一个函数 $h: X\to\mathbb{R}$, $h(x)$ 越高，代表 x 越复杂。

例子:

- $X=k^N$. 对 $x:=(x_1,\ldots,x_N)\in\mathbb{Q}^N\subseteq k^N$,
  把 x_i 写成 $x_i=p_i/q_i, p_i,q_i\in\mathbb{Z},(p_i,q_i)=1$,
  则 $h(x)=\log(\max\{|p_i|,|q_i|,i=1,\ldots,N\})$.

$F: X\to X$ 自映射 (或有理自映射)

猜想-定义 (Kawaguchi-Silverman, 2016)

极限 $\alpha_F(x):=\lim_{n\to\infty} h^+(x)^{1/n}$ 存在, 其中 $h^+(x)=\max\{h(F^n(x)),1\}$.
若 $\{x,F(x),\ldots\}$ 在 X 中Zariski 稠密，则 $\alpha_F(x)=\lambda_1(F)$.

拓扑与算术复杂性:2. 高度与算术次数

假设 $k=\overline{\mathbb{Q}}$, X 是 (拟) 射影代数簇 (如: $X=\mathbb{P}^N, k^N$), 我们通常用高度来描述 X 中点的复杂性。高度是一个函数 $h: X\to\mathbb{R}$, $h(x)$ 越高，代表 x 越复杂。

例子:

- $X=k^N$. 对 $x:=(x_1,\dots,x_N)\in\mathbb{Q}^N\subseteq k^N$,
  把 x_i 写成 $x_i=p_i/q_i, p_i,q_i\in\mathbb{Z},(p_i,q_i)=1$,
  则 $h(x)=\log(\max\{|p_i|,|q_i|, i=1,\dots,N\})$.

  $F: X\to X$ 自映射 (或有理自映射)

猜想-定义 (Kawaguchi-Silverman, 2016)

极限 $\alpha_F(x):=\lim\limits_{n\to\infty} h^+(x)^{1/n}$ 存在, 其中 $h^+(x)=\max\{h(F^n(x)),1\}$.
若 $\{x,F(x),\dots\}$ 在 X 中Zariski 稠密，则 $\alpha_F(x)=\lambda_1(F)$.

- 当 $X=k^N$, $S\subseteq k^N$ 在 k^N 中 Zariski 稠密是指, 对任何 $P\in k[x_1,\dots,x_N]\setminus\{0\}$, 存在 $z\in S, P(z)\neq 0$.