Zeta-函数与L-函数

Riemann ζ 函数

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

如果 $s \in \mathbb{R}$　　$s=1$　　$\zeta(1) \overset{?}{=} \sum \frac{1}{n} = +\infty$ 调和级数, 发散, $\sum \frac{1}{n}$

　　　　　　　$s>1$　　$\zeta(s) \overset{\checkmark}{=} \sum \frac{1}{n^s}$ 收敛

Euler　$\zeta(2) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

Riemann: 把 $s \in \mathbb{C}$

$Re(s)>1$　　$\zeta(s) \overset{\checkmark}{=} \sum_{n\geq 1} n^{-s}$ 收敛, 在半平面中定义

$Re(s) \leq 1$ 如何定义?

Euler product

假设 收敛性

$p^{\alpha(-s)}$

$$\prod_p \frac{1}{1-p^{-s}} = \prod_p \left(1+p^{-s}+p^{-2s}+p^{-3s}+\cdots\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} n^{-s} = \zeta(s)$$

素分解 $n = \prod p_i^{\alpha_i}$

$n^{-s} = \sum p_i^{(-s)\cdot\alpha_i}$

$$\boxed{\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1-p^{-s}}}$$ Euler 乘积.

"Cor" 素数有无穷个.

"Pf" 否则, 右式在 $s=1$ 为有限数值 与 $\zeta(1)=+\infty$ 矛盾.　　#

缺了什么?　$\infty \in \Omega_{\mathbb{Q}}$　$\longleftrightarrow \mathbb{Q}_\infty = \mathbb{R}$

Gamma 函数　$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} t^{s-1} e^{-t}\, dt$　　$s \in \mathbb{C}$, $Re(s)>1$　积分收敛

$n \in \mathbb{N}$　$\Gamma(n+1) = n!$

完备的Riemann ζ函数:　$\xi(s) = \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \cdot \zeta(s)$

完备的Riemann ζ函数: $\xi(s) = \underbrace{\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}\cdot\zeta(s)$

Th $\zeta(s)$ 与 $\xi(s)$ 均可解析延拓为 $\mathbb{C}$ 上的亚纯函数

$s=1$ 是 $\zeta(s)$ 唯一的极点 且是单重极点. 且

$\xi(s)=\xi(1-s)$ (等价地 $\zeta(s)=\zeta(1-s)\,\pi^{s-\frac{1}{2}}\dfrac{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}$)

(于是 $Re(s)<0$ $\zeta(s)$ 也是清楚的)

$s=$负偶数 是 $\zeta(s)$ 的平凡零点.

未知: $0<Re(s)<1$ 带状区域

Conj (Riemann Hypothesis) $\zeta(s)$ 所有非平凡零点均在 $Re(s)=\frac{1}{2}$

Dedekind ζ 函数

Riem ζ: Euler 积 用到 $\mathbb{Z}$ UFD.

K $\quad \mathcal{O}_K$ Dedekind 整环. 理想唯一分解

$$\zeta_K(s)=\sum_{I} N(I)^{-s} = \prod_{\mathfrak{p}} \frac{1}{1-N(\mathfrak{p})^{-s}} \qquad \left(\begin{array}{c} N(I)\in\mathbb{N} \\ \parallel \\ [\mathcal{O}_K : I] \end{array}\right)$$

I 取遍非0整理想

$\mathfrak{p}$ 非0 素理想

Hecke: $\zeta_K(s)$ 也有解析延拓到整个复平面,

$s=1$ 唯一极点, 单极点, 也有函数方程, 也有Riemann假设

$$\zeta_K(s)=\frac{a_{-1}}{(s-1)}+a_0+a_1(s-1)+a_2(s-1)^2+a_3(s-1)^3+\cdots\cdots$$

系数 a_{-1} 的算术意义?

Th (类数公式)

$$\lim_{s\to 1}(s-1)\zeta_K(s)=\frac{2^{r_1}(2\pi)^{r_2}\,Reg_K\cdot h_K}{w_K\cdot\sqrt{|d_K|}}$$

其中 $[K:\mathbb{Q}]=n=r_1+2r_2$ $\quad r_1$个实嵌入

r_2对共轭复嵌入.

其中 $[K:\mathbb{Q}]=n=r_1+2r_2$　　r_1 个实嵌入，r_2 对共轭复嵌入.

$h_K=|cl(K)|$

Reg_K: regulator 由 $\mathcal{O}_K^\times$ 的信息给出.（略）

$w_K=|\mu(K)|=|(\mathcal{O}_K^\times)_{tor}|$

$d_K=K/\mathbb{Q}$ 的判别式.

有限域上的代数簇的ζ函数

V: $\mathbb{F}_p$ 上的光滑射影代数簇　$V\subset\mathbb{P}^n$

$\forall m\geq 1$　　$V(\mathbb{F}_{p^m})=\mathbb{F}_{p^m}$-有理点集

$$Z(V,T)=\exp\Big(\sum_{m\geq1}|V(\mathbb{F}_{p^m})|\cdot\frac{T^m}{m}\Big)\in\mathbb{Q}[[T]]$$
形式幂级数

其中 $\exp(T)=1+T+\frac{T^2}{2!}+\cdots+\frac{T^n}{n!}+\cdots\in\mathbb{Q}[[T]]$

$\zeta(V,s):=Z(V,p^{-s})$　（局部）ζ-函数.
$s\in\mathbb{C}$

Weil Conjecture（Th. Deligne）

① $Z(V,T)\in\mathbb{Q}(T)\subsetneq\mathbb{Q}[[T]]$

② $\zeta(V,s)$ 有关于 $Re(s)=\frac{n}{2}$ 对称的函数方程 $s\leftrightarrow n-s$. 其中 $n=\dim V$

③ $\zeta(V,s)$ 的零点的实部是某些半整数（Riemann 假设）

Weil 的思路:

① 对有限域上的代数簇建立一套与微分流形上的拓扑相类似的上同调理论（后来: Grothendieck: étale 上同调, ℓ-adic 上同调）

② Frobenius 映射 "$\mathrm{Frob}: \begin{matrix}\overline{\mathbb{F}}_p\to\overline{\mathbb{F}}_p\\ x\mapsto x^p\end{matrix}$"（特征 p 特有）用 Lefschetz 不动点定理的类似物

$\mathrm{Frob}(x)=x\iff x=x^p\underset{x\in\overline{\mathbb{F}}_p}{\iff}x\in\mathbb{F}_p$

$$V(\overline{\mathbb{F}}_p)^{\mathrm{Frob}^m}=V(\mathbb{F}_{p^m})$$

$V(\mathbb{F}_p) = V(\mathbb{F}_{p^m})$

③ Poincaré 对偶在类比物 ⟿ 函数方程.

(⚠ 需要在 $\mathbb{F}_p$ 上去模拟 $\mathbb{R}$、$\mathbb{C}$ 上拓扑)

例 $V=\mathbb{P}^0_{/\mathbb{F}_p}$ = 一个点

$$\log Z(\mathbb{P}^0,T)=\underbrace{\sum_{m\geq 1} 1\cdot \frac{T^m}{m}} = \log\frac{1}{1-T}$$

从而 $Z(\mathbb{P}^0,T)=\frac{1}{1-T}\in\mathbb{Q}(T)\subset\mathbb{Q}[[T]]$

Exer $Z(\mathbb{P}^1,T)=\boxed{\frac{1}{(1-T)(1-pT)}}\in\mathbb{Q}(T)$

提 $\mathbb{P}^1=\mathbb{A}^1\sqcup\mathbb{P}^0$

椭圆曲线的 ζ-函数

$q=p^n$ $\mathbb{F}_q$ 有限域

Th (Hasse-Weil) $\mathbb{F}_q$ 上亏格为 g 的光滑射影曲线 C 有,

$$\left|1+q-|C(\mathbb{F}_q)|\right|\leq 2\sqrt{q}\cdot g$$

Rk $1+q=|\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q)|$ 曲线与直线 $\mathbb{P}^1$ 的 $\mathbb{F}_q$-有理点个数的差别的估计

Cor $(q=p,\ g=1)$ $E/\mathbb{F}_p$ 椭圆曲线

若 $\boxed{a_p := p+1-|E(\mathbb{F}_p)|}$ 则 $\boxed{|a_p|\leq 2\sqrt{p}}$

$E/\mathbb{F}_p$ ζ-函数: $E(\mathbb{F}_{p^m})$ ⟷ E的闭点

$$Z(E,T)=\exp\left(\sum_{m\geq 1}|E(\mathbb{F}_{p^m})|\cdot\frac{T^m}{m}\right)$$

用一些代数几何 ↓ $1-a_pT+pT^2$

$$\underset{\text{用一些代数运算}}{=} \frac{1-a_pT+pT^2}{(1-T)(1-pT)} \in \mathbb{Q}(T) \qquad a_p \in \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}.$$

分子因式分解 $1-a_pT+pT^2 = (1-\alpha T)(1-\beta T)$

$\left(\Delta = a_p^2-4p \underset{<0}{\leq 0} \Rightarrow\right)$ $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ 共轭

Rk $\log Z(E,T) = \log \frac{(1-\alpha T)(1-\beta T)}{(1-T)(1-pT)} = \sum_{m\geq 1} \underbrace{(1+p^m-\alpha^m-\beta^m)}\frac{T^m}{m}$

$\Rightarrow |E(\mathbb{F}_{p^m})| = 1+p^m-\alpha^m-\beta^m$

这个值由 α, β 唯一确定，由 a_p 唯一确定

$\hookrightarrow$ 由 $\boxed{|E(\mathbb{F}_p)|}$ 唯一确定

关键值：a_p

$$\zeta(E,s) = Z(E,p^{-s}) = \frac{(1-\alpha p^{-s})(1-\beta p^{-s})}{(1-p^{-s})(1-p^{1-s})}$$

$s=0$ 及 $s=1$ 处 单极点

单零点：s 为 $p^s=\alpha$ 或 $p^s=\beta$ 的根

$s=\sigma+it \qquad |p^s| = p^\sigma$

即 $\zeta(E,s)$ 零点的实部 $\sigma = \frac{1}{2} \Longleftrightarrow |\alpha| = |\beta| = p^{\frac{1}{2}}$

$1+a_pT+pT^2 = (1-\alpha T)(1-\beta T) \Rightarrow \alpha\cdot\beta = p \Rightarrow |\alpha| = |\beta| = p^{\frac{1}{2}}$

Hasse-Weil $\Rightarrow |a_p| \leq 2\sqrt{p} \Rightarrow \Delta < 0 \Rightarrow (\alpha = \bar{\beta})$

$\Downarrow$

$\zeta(E,s)$ 相应的Riemann假设 ✓

exer 函数方程：$\zeta(E,s) = \zeta(E,1-s)$

$\mathbb{Z}$上(或$\mathbb{Q}$上)的"代数簇"的ζ-函数

$\hookrightarrow$ V 系数在$\mathbb{Z}$中的多项式.

多项式 mod p $\quad \mathbb{F}_p$ 代数簇 V_p (mod p 约化)

多项式 mod p $\quad \mathbb{F}_p$ 代数簇 V_p (mod p 约化)

$$\cancel{3x^3}+4y^3+5z^3=0 \mod 7, 3$$

对几乎所有 p. V_p 是 $\mathbb{F}_p$ 上光滑射影簇, $\zeta(V_p,s)$ 之前已定义.

剩下少数 p. 重新定义 $\zeta(V_p,s)$

Deligne: Riemann 假设对 $V_p/\mathbb{F}_p$ 成立 $\Rightarrow \overset{\zeta(V,s)}{\overline{\prod_p}} \zeta(V_p,s)$ 无穷乘积在 $Re(s)>1+\dim V$ 收敛的.

Conj (Hasse-Weil) $V/\mathbb{Q}$ 光滑射影簇, 则 $\zeta(V,s)$ 可~~解析延拓~~延拓为 $\mathbb{C}$ 上的亚纯函数, 有关于 $s \longleftrightarrow d+1-s$ 函数方程. $d=\dim V$

(且零点实部是某些半整数) $\Rightarrow$ Riemann Hypothesis

例 $V=\mathbb{P}^0_{/\mathbb{Q}}$. $\forall p$ V_p 都是好的.

$$Z(V_p,T)=\frac{1}{1-T} \qquad \zeta(V_p,s)=\frac{1}{1-p^{-s}}$$

$$\zeta(\mathbb{P}^0,s)=\prod_p \zeta(V_p,s)=\prod \frac{1}{1-p^{-s}}=\zeta(s) \text{ Riemann } \zeta\text{-函数}$$

exer $V=\mathbb{P}^n_{/\mathbb{Q}}$. 求证 $\zeta(\mathbb{P}^n,s)=\zeta(s)\zeta(s-1)\cdots\zeta(s-n)$

椭圆曲线的 ζ-函数与 L-函数

$E/\mathbb{Q}$ 极小 Weierstrass 方程 $\quad y^2=x^3+ax+b \quad a,b\in\mathbb{Q}$

变量替换 $\longrightarrow a,b\in\mathbb{Z}$

$$\Delta_E\in\mathbb{Z}$$

有限 $S=\{p \mid p\mid\Delta_E\}\subset\Omega=\Omega_{\mathbb{Q}}$.

$$\zeta_S(E,s)=\prod_{p\notin S}\zeta(E_p,s)=\frac{\zeta_S(s)\,\zeta_S(s-1)}{L_S(E,s)}$$

其中
$$\begin{cases}\zeta_S=\prod_{p\notin S}\frac{1}{1-p^{-s}} & \text{(同理 } \zeta_S(s-1)\text{) Riemann } \zeta \text{ 在 } S \text{ 外的部分}\\ L_S(E,s)=\prod_{p\notin S}\frac{1}{1-a_p p^{-s}+p^{1-2s}}=\prod_{p\notin S}\frac{1}{1-\alpha_p p^{-s}}\frac{1}{1-\beta_p p^{-s}}\end{cases}$$

$$L_S(E,s)=\prod_{p\notin S}\frac{1}{1-a_p p^{-s}+p^{1-2s}}=\prod_{p\notin S}\frac{1}{1-\alpha_p p^{-s}}\cdot\frac{1}{1-\beta_p p^{-s}}$$

其中 $|\alpha_p|=|\beta_p|=p^{\frac{1}{2}}$

在 $\mathrm{Re}(s)>\frac{3}{2}$ 收敛.

而对 $p\in S$ 定义 $L_p(T)$ 为 $(T=p^{-s})$

$$L_p(p^{-s})=\begin{cases}(1-a_p p^{-s}+p^{1-2s}) & p\notin S\\ 1-p^{-s} & ①\\ 1+p^{-s} & ②\\ 1 & ③\end{cases}$$

$$L(E,s)=L_S(E,s)\cdot\prod_{p\in S}\frac{1}{L_p(p^{-s})}=\prod_{p\in 素}\frac{1}{L_p(p^{-s})}$$

补全∞位之后:

$$\Lambda(E,s)=N_{E/\mathbb{Q}}^{\frac{s}{2}}\cdot(2\pi)^{-s}\,\Gamma(s)L(E,s)$$

其中 $N_{E/\mathbb{Q}}\in\mathbb{N}$ conductor

Hasse-Weil Conj 对 E 表述为:

$\Lambda(E,s)$ 可解析延拓为 $\mathbb{C}$ 上的全纯函数, 且满足函数方程

$$\Lambda(E,s)=\omega_E\,\Lambda(E,2-s)\quad(\text{其中 }\omega_E=\pm1)$$

且零点实部有某些性质)

Th (Wiles, Breuil-Conrad-Diamond-Taylor)

$E/\mathbb{Q}$ (半稳定) 椭圆曲线, 上述 Conj 成立

Rk. 他们其实证明 Taniyama-Shimura-Weil Conj:

$L(E,s)$ 与某个模形式的 L-函数是一样的 (模椭圆曲线)

Fermat 大定理 ($\Leftarrow$ T-S-W Conj) $\boxed{a^n+b^n=c^n}$

$E:\ y^2=x(x-a^n)(x+b^n)$ (先 $a\neq0$, $b\neq0$, $a\neq\pm b$ 以使 $\Delta\neq0$)

$E: y^2 = x(x-a^n)(x+b^n)$ （若 $a\neq0$, $b\neq0$, $a\neq\pm b$ 则 $\Delta_E\neq0$ $\Rightarrow E$ ell. curve）
（Frey 曲线）

Frey (82-85) 发现（奇特想法）若 $a^n+b^n=c^n$ $(n\geq3)$ $a,b,c\in\mathbb{Q}$ 非0解,
则 E 的 L-函数会十分奇怪以致于不可能来源于模形式.
Serre 85, + Ribet 86 上述想法 ✓.
Wiles 证明 T-S-W Conj 的特例 $\Rightarrow$ $a^n+b^n=c^n$ 不会成立.

BSD 猜想:

Conj (Birch-Swinnerton-Dyer) $E/\mathbb{Q}$ 椭圆曲线:

(1) $L(E,s)$ 于 $s=1$ 处的零点的阶 $=r\geq0$, 则 $r=\mathrm{rk}\,E(\mathbb{Q})$

(2) $$\lim_{s\to1}\frac{L(E,s)}{(s-1)^r}=\Omega\cdot\left(\prod c_p\right)\cdot\frac{|Ш(E/\mathbb{Q})|\,\mathrm{Reg}(E/\mathbb{Q})}{|E(\mathbb{Q})_{tor}|^2}$$

其中 $\Omega=\int_{E(\mathbb{R})}\frac{dx}{2|y|}\in\mathbb{R}$

$c_p\sim$ 来源于 $\underset{p\mid\Delta_E}{\text{坏约化}}$ 的信息 $c_p\in\mathbb{Z}$, 本质上是 $\int_{E(\mathbb{Q}_p)}\frac{dx}{2|y|}$

$\mathrm{Reg}(E/\mathbb{Q})$ regulator.

$Ш(E/\mathbb{Q})=\mathrm{Ker}\left(H^1(\mathbb{Q},E)\to\prod_p H^1(\mathbb{Q}_p,E)\right)$

Tate-Shafarevich Conj $Ш(E/\mathbb{Q})$ 有限群.

对比 $$\lim_{s\to1}(s-1)\zeta_K(s)=\frac{2^{r_1}(2\pi)^{r_2}\,\mathrm{Reg}_K\cdot h_K}{w_K\cdot\sqrt{|d_K|}}$$